

Chapitre 6 : Approfondissement de la modélisation : la mécanique des milieux continus

Nous venons de le voir dans le Chapitre 5, la modélisation analytique est intéressante pour l'estimation du volume de la hernie en fonction du recul mais elle ne permet pas de simuler une part importante des phénomènes observés au cours d'une décompression orbitaire. Pour y remédier, nous avons décidé de mettre en œuvre un modèle capable de prendre en compte la géométrie complexe de chaque orbite de patient, la taille et la position de l'ostéotomie ainsi que les paramètres mécaniques comme la force appliquée sur le globe, la surpression dans la zone intra-orbitaire et le volume des tissus graisseux qui fuient à travers l'ostéotomie. Ce modèle est basé sur la mécanique des milieux continus que nous allons présenter dans ce chapitre. Etant donné que nous avons utilisé un matériau poroélastique pour modéliser les tissus intra-orbitaires et que ce formalisme est dérivé des formulations élastique et fluide, trois approches seront abordées ici. Dans la première partie, nous verrons l'approche élastique, dans la deuxième, les matériaux fluides et nous finirons en présentant les matériaux poroélastiques.

Nous avons introduit la méthode des éléments finis dans le Chapitre 3. En particulier, nous avons vu que cette méthode pouvait être divisée en quatre étapes : (1) la détermination des propriétés des matériaux et les équations les gouvernant localement, (2) l'assemblage de ces équations, (3) la définition et l'intégration des conditions limites et (4) la résolution du système ainsi obtenu. Nous avons vu que la déformation d'un corps résulte des contraintes qui lui sont appliquées, et vice et versa. Ces deux points de vue expriment le lien qui existe entre contraintes et déformations dans la nature. La description de cette connexion est plus ou moins complexe selon le matériau étudié. Physiquement, ce lien est modélisé par une loi de comportement propre à chaque matériau. Cette loi de comportement est déterminée expérimentalement, au cours de tests visant à caractériser le matériau, en lui appliquant un chargement mécanique et en mesurant la déformation résultante. Ces tests sont appelés tests de rhéologie. A partir de ces expériences, les équations du comportement du matériau peuvent être définies.

Les matériaux sont classés suivant différents critères : leurs propriétés (élastique, visqueux, plastique...), leur comportement linéaire ou non, leur dépendance au temps ou non, leur état physique (solide, liquide...), leur homogénéité ou non... Dans cette partie, nous allons nous focaliser sur trois types de matériaux pouvant être modélisés par éléments finis. Il s'agit de matériaux : élastique, fluide, et poroélastique. D'autres types sont possibles et envisageables pour la modélisation d'autres phénomènes, mais pour les tissus mous de l'orbite, nous avons décidé de nous limiter à ces trois matériaux.

1. L'approche élastique

La méthode des éléments finis est basée sur la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement d'un corps qui se déforme et se déplace sous l'influence de contraintes externes. Cette déformation, ainsi que les contraintes qu'elle engendre à l'intérieur du matériau, doivent permettre de calculer le mouvement résultant du corps étudié

conformément au principe fondamental de la dynamique appelé aussi conservation de la quantité de mouvement. Dans cette partie, nous allons nous placer dans le cas d'un modèle élastique. Une description plus complète est donnée dans la partie 1 de l'Annexe F et dans divers ouvrages comme ceux de Zienkiewicz [Zienkiewicz et Taylor, 1994] ou de Touzot [Touzot et Daht, 1984].

Les matériaux élastiques linéaires sont les matériaux les plus utilisés, que ce soit dans l'industrie (par exemple dans la conception des avions) ou dans la recherche (par exemple dans la modélisation éléments finis des os). Sous une contrainte, un corps élastique se déforme proportionnellement à cette contrainte. La particularité des matériaux élastiques fait que, lorsque cette contrainte cesse, le corps reprend sa forme initiale.

L'état de déformation d'un corps élastique est caractérisé par le tenseur de déformation de Green-Lagrange ε tandis que l'état de contrainte du milieu est défini par le tenseur de contrainte σ .

Pour résoudre un problème donné, il est nécessaire de définir les conditions limites du phénomène étudié pour déterminer ε et σ .

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange ε s'obtient à partir du champs de déplacement \mathbf{U} , selon l'équation aux dérivées partielle suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \nabla \mathbf{U}) \quad (6.1)$$

Dans le cas où la déformation est petite (inférieure à 10 %), le terme du second ordre de ε peut être négligé. On parle alors d'élasticité en «petites déformations» ou d'élasticité linéaire (par opposition aux «grandes déformations») :

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U}) \quad (6.2)$$

La calcul de ε et σ , pour des conditions aux limites données, est rendu possible par l'intermédiaire de deux équations. La première est l'équation d'équilibre local ou équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{f} + \text{div} \sigma \quad (6.3)$$

où ρ est la masse volumique du milieu continu et \mathbf{f} est la densité de forces volumiques (par exemple la force de gravité). $\text{div} \sigma$ correspond aux forces volumiques internes résultant des forces surfaciques.

La seconde équation vient de l'hypothèse que l'on fait pour décrire la relation liant les contraintes et les déformations. Cette relation s'appelle la loi de comportement du matériau et s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{h}(\varepsilon) \quad (6.4)$$

où \mathbf{h} est la fonction déterminant le comportement du matériau (élastique, hyperélastique...).

Par exemple, dans le cas d'un matériau isotrope et linéaire, \mathbf{h} est une matrice composée de deux coefficients indépendants (loi de Hooke). Les propriétés d'élasticité sont donc totalement définies à l'aide de ce couple de coefficients : soit les coefficients de Lamé, soit le module de Young et le coefficient de Poisson. Les plus utilisés sont le module de Young, E , caractérisant la raideur du matériau, et le coefficient de Poisson, ν , représentant sa déformation transverse en fonction de la déformation appliquée.

Les solutions analytiques des problèmes d'élasticité linéaire sont difficiles à obtenir, à part dans des cas très particuliers. C'est pour cela que la méthode des éléments finis (présentée dans le Chapitre 3) est souvent utilisée pour obtenir une solution numérique approchée après discrétisation de la structure.

Quelque soit le type de matériau, la théorie de la mécanique des milieux continus ne change pas. Seules les inconnues et l'équation du comportement diffèrent.

2. L'approche fluide

La mécanique des fluides est une discipline utilisant les outils de la mécanique des Milieux Continus. Elle comprend l'étude des gaz et des liquides à l'équilibre et en mouvement, ainsi que l'étude de l'interaction de ces derniers avec les corps solides. Contrairement aux solides, qui ne se déforment que s'ils sont soumis à de puissantes forces, les liquides ou les gaz changent de forme beaucoup plus aisément : à l'état fluide, la matière présente la propriété de s'écouler. La façon habituelle de simuler l'écoulement de fluide (gaz ou liquide) est de trouver la solution des équations qui décrivent l'évolution des fluides.

Pour les fluides, les inconnues sont la pression \mathbf{P} interne du fluide et le champ de vecteur vitesse \mathbf{V} à l'intérieur du fluide [Bernardin, 2003, Midoux, 1967]. Dans le cas général, c'est-à-dire pour les fluides Newtoniens (avec une viscosité, avec une déformation indépendante du temps) compressibles, c'est l'équation de Navier-Stokes qui est utilisée comme loi fondamentale de la dynamique :

$$-\nabla \mathbf{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (6.5)$$

où ρ est la masse volumique du fluide et ν est sa viscosité dynamique.

Cette équation permet de calculer la pression et la vitesse dans tout le fluide et à tout instant pour des conditions aux limites données. C'est en fait la loi de Newton ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$) appliquée à une particule fluide : $\nabla \mathbf{P}$ est la densité volumique des forces de pression, \mathbf{f} est la densité volumique des forces de champ (gravité...) et $\nabla (\operatorname{div} \mathbf{V})$ est la densité volumique des forces de viscosité (ce terme est nul pour les fluides incompressibles).

Dans le cas où le problème est indépendant du temps (stationnaire), la vitesse du fluide ne varie pas et donc $d\mathbf{V}/dt = 0$.

Les fluides sont caractérisés par leur compressibilité (leur capacité à réduire leur volume sous l'action d'une contrainte), leur viscosité (les frottements internes au fluide) et leur différents écoulements (stationnaire ou instationnaire, laminaire ou turbulent, rotationnel ou irrotationnel).

Dans la suite, nous supposons que nous sommes en présence d'un fluide Newtonien stationnaire (stable à l'équilibre), laminaire (sans turbulence) et irrotationnel (sans composante de rotation au niveau des particules fluides).

3. L'approche poroélastique

Comme son nom l'indique, un matériau poroélastique est un matériau solide (identifié dans ce qui suit par l'exposant s) élastique et poreux. Ses pores sont remplis d'un fluide (identifié dans ce qui suit par l'exposant f), comme c'est le cas, par exemple, pour une éponge immergée dans de l'eau. Dans cette partie, nous proposons de présenter succinctement les bases de la poroélasticité, développées, entre autres, par Coussy [Coussy, 1991], Biot [Biot, 1941] ou encore Mow [Mow *et al.*, 1980].

Il existe deux approches différentes pour modéliser les milieux poreux. La première consiste à moyenniser les équations du comportement des deux matériaux composant le milieu poreux : celle pour le solide et celle pour le fluide (voir notamment [Quintard *et al.*, 2001] ou [Almeida *et al.*, 1997]). Le logiciel éléments finis Marc, utilisé pour nos simulations, n'étant pas basé sur celle-ci, nous ne la développerons pas ici. Le lecteur pourra se référer à la deuxième partie de l'Annexe F pour une description succincte de sa formulation théorique.

La deuxième approche des milieux poroélastiques est présentée dans le livre d'Olivier Coussy [Coussy, 1991]. Cette formulation se base aussi sur la représentation du milieu sous la forme de deux phases : un squelette solide déformable et un fluide saturant l'espace interstitiel. Les deux milieux sont superposés l'un à l'autre dans le temps et dans l'espace. Contrairement à la première approche consistant à moyenniser les deux phases, celle-ci est caractérisée par le fait qu'elle prend d'abord en compte la phase solide et ensuite la phase fluide. Cette façon de procéder est basée sur le fait que la déformation essentiellement observable est celle du squelette solide et qu'elle est donc privilégiée dans la description du milieu poreux. La déformation et la cinématique de cette phase sont décrites comme pour les milieux continus à une seule phase. Par contre, le milieu contenant également des particules fluides à l'intérieur du squelette, la particularité des matériaux poreux saturés apparaît dans la mise en équation des grandeurs physiques associées au matériau à l'instant t et dans le volume considéré.

Il existe des formulations qui traitent des milieux poroélastiques non saturés mais nous ne décrivons ici que le cas saturé où la phase fluide remplit entièrement les espaces interstitiels de la matrice solide. Cette hypothèse correspond relativement bien aux tissus biologiques et notamment au contenu intra-orbitaire.

L'espace interstitiel, ou espace poreux connecté, est l'espace dans lequel s'effectuent les échanges fluides. A l'intérieur de cet espace, la phase fluide est continue, puisqu'elle sature le squelette. Néanmoins, il peut exister des pores non connectés à l'espace interstitiel et qui peuvent être ou non remplis de fluide (Figure 6.1). Il n'y a aucune infiltration dans ces pores. Ce genre de pores (on parle de porosité occluse) est présent dans les roches, mais pas dans les tissus biologiques qui sont complètement saturés de liquide physiologique. Pour cette raison, nous ne traiterons pas cette configuration.

La porosité totale d'un corps poroélastique est donnée par le rapport du volume non solide sur le volume total. La porosité connectée d'un corps est le rapport du volume de l'espace interstitiel sur le volume total. Dans la suite, le terme porosité sera employé pour désigner exclusivement la porosité connectée et sera noté ϕ .

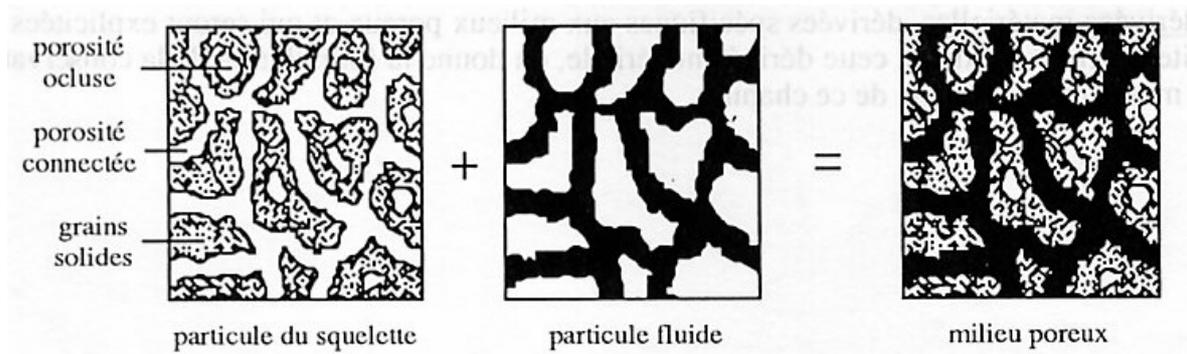


Figure 6.1 – Schématisation d'un milieu poreux selon Coussy [Coussy, 1991]. La matrice solide est présentée à gauche, avec son espace interstitiel. Au milieu, l'espace occupé par le fluide est présenté en noir. A droite, la combinaison du squelette et de la phase fluide conduit au milieu poroélastique.

La phase fluide occupant tout l'espace disponible, c'est-à-dire les pores, son volume est de $\Omega^f = \phi.\Omega$ tandis que le squelette occupe l'espace $\Omega^s = (1-\phi).\Omega$, si Ω est le volume total du corps étudié.

L'idée de base de cette formulation des milieux poreux consiste en la superposition dans le temps et dans l'espace de deux milieux continus : l'un représentant le squelette et l'autre la phase fluide. Ainsi un point donné d'un volume élémentaire sera composé d'une particule solide et d'une particule fluide à un instant donné.

Pour décrire un milieu poreux de façon continue, il est nécessaire de se placer à l'échelle macroscopique. De ce fait, la porosité en un point géométrique donné est supposée définie sur un volume élémentaire englobant suffisamment de matière pour être représentatif des phénomènes étudiés.

Sous l'action de forces extérieures, surfaciques ou volumiques, et/ou de gradients de pression du fluide saturant, les milieux poreux se déforment. La déformation observable est celle du squelette et sa description est donnée par le tenseur de déformations ε qui correspond à celle d'un milieu continu classique qu'on a vu dans la première partie de ce chapitre avec l'équation (6.1).

Par rapport au cas élastique, un plus grand nombre de conditions limites sont prises en compte pour déterminer le tenseur des contraintes σ .

Comme pour un milieu élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement :

$$\text{div}\sigma(x,t) + \rho\mathbf{f} = 0$$

(6.6)

Cette équation est obtenue à partir de l'équation (6.3), avec $\ddot{U} = 0$, c'est-à-dire que l'accélération est négligée (cas quasi statique). $\sigma(x, t)$ est le tenseur de contraintes totales du milieu poreux car il ne sépare pas les contraintes supportées par le squelette ou le fluide à tout point x et à tout instant t .

Par contre, le débit q du fluide dans les pores joue un rôle dans la résolution du problème. Dans cette formulation, il y a conservation de la masse (solide et fluide) : il n'y a ni création ni perte d'éléments constitutifs du squelette ou du fluide. Cette relation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\text{trace}(\varepsilon)+\text{div}q=0 \quad (6.7)$$

Pour formuler le problème poroélastique, on a donc besoin de résoudre les équations (6.7) relative à la conservation de la masse et (6.6) relative à la conservation de la quantité de mouvement avec les conditions limites suivantes :

- En effort :

$$\sigma(x,t).\vec{n}=\mathbf{g} \quad (6.8)$$

où \vec{n} est la normale à l'élément de surface sur laquelle est appliquée la force surfacique \mathbf{g} (ou force imposée à la surface) au corps étudié et donnant la contrainte $\sigma(x, t)$ au point x et au temps t .

- En déplacement :

$$\vec{U}(x,t)=\vec{U}_{imp} \quad (6.9)$$

où \vec{U}_{imp} est le déplacement imposé à la surface du corps étudié et conduisant au déplacement $\vec{U}(x,t)$ au point x appartenant à la surface et au temps t .

- En pression :

$$\mathbf{P}(x,t)=\mathbf{P}_{imp} \quad (6.10)$$

où \mathbf{P}_{imp} est la pression imposée à la surface du corps étudié et conduisant à la pression $\mathbf{P}(x,t)$ au point x appartenant à la surface et au temps t .

- Et en débit (pour la phase fluide) :

$$q(x,t).\vec{n}=\mathbf{J}_{imp}^f \quad (6.11)$$

où \vec{n} est la normale à l'élément de surface sur laquelle le jacobien \mathbf{J}_{imp}^f du gradient de pression pour la phase fluide est imposé et conduisant au débit $q(x,t)$ au point x et au temps t .

La résolution des équations (6.6) et (6.7) est effectuée grâce aux lois de comportement du milieu poroélastique. Comme pour le milieu élastique, ces lois tiennent compte des déformations de la matrice solide mais en plus, elles intègrent le mouvement de la phase fluide. La première loi de comportement des milieux poreux définit la relation de comportement matériel du milieu poreux homogénéisé :

$$\sigma(x,t)=\sigma_0(x,t_0)+\mathbf{h}(\varepsilon(x,t))-\mathbf{P}(x,t).\mathbf{I}-\mathbf{P}_0(x,t).\mathbf{I} \quad (6.12)$$

où $\sigma_0(x, t_0)$ est le tenseur des contraintes à l'instant initial t_0 , \mathbf{h} est la fonction déterminant le comportement élastique du squelette (et traduisant la loi de Hooke que nous avons introduite à la suite de l'équation (6.4)), \mathbf{I} est la matrice identité et \mathbf{P} et \mathbf{P}_0 sont les pressions à t et à t_0 .

Pour prendre en compte le comportement de la phase fluide dans la matrice élastique, une seconde loi, appelée loi de Darcy, est introduite qui permet de définir la diffusion du fluide dans le milieu poreux :

$$q=-\frac{k}{\mu}\text{grad}\mathbf{P} \quad (6.13)$$

où q est le débit des particules fluides dans le squelette et k/μ est la perméabilité relative du milieu poreux.

Les équations (6.12) et (6.13) sont les lois de comportement du matériau poroélastique telles qu'on les trouve dans la littérature. Pour simplifier les choses, dans la plupart des cas, on évite de rentrer dans la formulation thermodynamique des milieux continus et de compliquer les équations données ci-dessus.

Les modélisations numériques de l'orbite sont réalisées, dans notre étude, avec le logiciel éléments finis Marc © (MSC Software Inc.). La formulation utilisée dans ce logiciel fait appel aux hypothèses simplificatrices suivantes :

- Simplification de l'équilibre énergétique en utilisant une transformation isotherme (pas d'échange d'énergie calorifique entre phases)
- Phases non miscibles, il n'y a donc pas d'échanges de volumes et de masses (comme c'est le cas par exemple pour l'eau et l'huile)
- Les matériaux sont intrinsèquement incompressibles et chimiquement inactifs (les masses volumiques des phases solide ρ_s et fluide ρ_f sont constantes).

Ces hypothèses sont raisonnables pour la modélisation des tissus mous intra-orbitaires qui nous préoccupent. Elle présentent de plus l'avantage de pouvoir obtenir un compromis entre réalisme du modèle et faisabilité du calcul (en évitant des temps de calcul prohibitifs et l'identification aléatoire de lois de comportement de matériau complexe).