

Chapitre 3 : Les différentes formes de modélisation physique

Nous venons de le voir, les GMCAO s'appuient essentiellement sur l'association du chirurgien à des techniques de traitement d'imagerie médicale, de modélisation, de fusion de données ou de robotique. Afin d'être de plus en plus précises, les stratégies opératoires vont par exemple associer aux planifications préopératoires classiques des techniques de simulation reposant sur des modèles complexes (modèles statistique ou biomécaniques, modèles d'irradiation, etc.).

La plupart des procédures de GMCAO, qui ont déjà été mises en place dans des spécialités cliniques aussi diverses que la neurochirurgie, l'orthopédie, la chirurgie ORL ou maxillo-faciale, font toutes l'hypothèse que les structures anatomiques opérées ne se déforment pas pendant l'opération, que ce soit de manière passive, en réaction à des contraintes externes, ou active, en raison de déformations physiologiques [Taylor *et al.*, 1996]. C'est la raison pour laquelle ce sont surtout les os du corps humain qui ont fait l'objet de procédures de GMCAO au cours des vingt dernières années (vertèbre, bassin, crâne, genou, etc.).

Comme l'essentiel du corps humain est composé de tissus biologiques qui se déforment, des travaux plus récents ont commencé à étudier et prendre en compte les déformations intrinsèques des tissus mous du vivant. Les premiers travaux ont exploré le comportement des organes tels que le cœur, le foie ou le cerveau. Deux pistes de recherche se sont dégagées, toutes deux tournées vers la modélisation des tissus mous.

La première a cherché à développer des «simulateurs chirurgicaux». L'objectif était l'élaboration de simulateurs virtuels pour l'apprentissage du geste chirurgical. On peut citer par exemple les travaux sur l'apprentissage du geste échographique [Troccaz *et al.*, 2000] ou ceux qui tournent autour du développement de simulateur du geste de chirurgie laparoscopique [Cotin *et al.*, 1990]. Les chercheurs de l'INRIA ont été précurseurs pour ces applications de chirurgie laparoscopique. Ces simulateurs ont pour objectif principal un «réalisme comportemental», avec une fidèle prise en compte de la texture des organes et des niveaux de forces et retours d'efforts mis en jeu. De plus, ils sont guidés par une contrainte forte de simulation « temps réel » des déformations des modèles.

La seconde piste de recherche a notamment été développée au sein de l'équipe GMCAO, du Laboratoire TIMC (pour Techniques de l'Imagerie, de la Modélisation et de la Cognition), sous la direction de Yohan Payan [Payan, 2002]. Elle vise à utiliser les modèles dans un cadre d'aide à la définition du planning chirurgical. L'idée consiste à prédire les déformations des tissus mous à l'aide de modèles déformables puis à intégrer ces prédictions dans le planning chirurgical. Les modèles utilisés pour une aide au planning chirurgical n'ont pas de contrainte « temps réel », mais exigent une extrême précision des déformations calculées. C'est essentiellement dans le cadre de cette deuxième piste que se place cette thèse.

Ces modèles sont appelés modèles physiques parce qu'ils permettent de simuler à la fois la forme géométrique des objets (forme et position) et les lois de comportement des structures modélisées. Selon la précision des modèles, ces lois sont plus ou moins fidèles à ce qui se passe dans la réalité. Plusieurs modèles ont été mis en œuvre. Ce chapitre est consacré à la description des principaux modèles utilisés dans ce domaine : les modèles analytiques, les modèles discrets et les modèles continus.

1. Les modèles analytiques

Une première approche de la simulation de phénomènes physiques est la modélisation analytique. C'est l'approche qui requiert le moins de ressources informatiques puisqu'elle cherche à approcher le phénomène et/ou la structure étudiés de façon à avoir le modèle le plus simple possible. Pour cela, les modèles analytiques se basent sur les équations de base de la théorie régissant un phénomène et les étudient sur une représentation abstraite du système réel, prenant en compte tout ou partie de la géométrie de la structure analysée.

Par exemple, pour étudier le mouvement d'une voiture avec un modèle analytique simple, on ne prend pas comme représentation la voiture elle-même, mais on peut plutôt prendre un point dans l'espace, auquel on attribue une masse et une vitesse. Pour définir les mouvements de ce point, on se base sur la théorie de la mécanique du point (principe fondamental de la dynamique). A partir de ce modèle simple, le mouvement de notre objet pourra être évalué dans la limite de la modélisation. En effet, on ne tient pas compte de paramètres qui peuvent modifier son comportement : par exemple, la voiture roule sur quatre roues sur lesquelles les masses peuvent être réparties différemment...

Avant de se lancer dans un modèle analytique, il faut donc définir quelles sont les variables intéressantes et pertinentes qu'on veut modéliser et celles qui ne le sont pas et que l'on néglige. Mais il faut aussi remarquer que le choix des variables se fait en référence à une théorie : si l'on cherche à caractériser les forces, c'est qu'on a les équations de la mécanique classique en tête ! Lorsque le cadre théorique est connu et le modèle défini, on cherche à résoudre les équations du phénomène étudié. Deux routes sont alors possibles : résoudre les équations à l'aide d'un ordinateur (il faut alors se poser la question de la précision numérique de l'algorithme utilisé), ou faire des approximations sur les équations pour chercher une solution analytique simple (se pose alors la question du domaine de validité des approximations). Il est d'ailleurs possible de suivre les deux routes à la fois. Remarquons qu'il ne faut pas confondre l'introduction d'approximations sur la résolution des équations avec l'élaboration de la modélisation initiale. La phase de modélisation est non seulement indispensable mais essentielle. La difficulté tient pour une grande part à cette phase d'analyse du système ou du phénomène modélisé, où il s'agit de découper dans la complexité du monde empirique un bout de réalité dont on construit une représentation abstraite à laquelle une théorie va pouvoir s'appliquer.

Il est parfois nécessaire d'ajuster les équations théoriques pour les faire coller au mieux aux phénomènes réels. Le modèle gagne ainsi en précision sans être pénalisé par l'ajout de nouvelles équations alourdissant sa résolution. Ces ajustements sont déterminés sur la base d'expériences réelles sur la structure ou le phénomène étudié dans les conditions où le modèle est censé fonctionner. Les données enregistrées pendant ces expériences permettent de pondérer le modèle analytique et de l'adapter à la situation précise dans laquelle il sera utilisé. Sorti de ce contexte, il faut utiliser le modèle ainsi défini avec une grande réserve puisqu'il n'a pas été établi pour d'autres comportements.

Malgré son manque relatif de précision, dépendant du nombre de facteurs pris en compte pour modéliser le phénomène étudié, la modélisation analytique est parfois la première approche à mettre en place dans toutes les études. En effet, celle-ci permet de disposer d'un outil de simulation rapide, puisque basé sur des équations relativement simples d'application, et d'une première étude relativement simplifiée de la structure ou du

phénomène analysé. Un modèle analytique peut ainsi permettre de donner un premier point de vue sur le comportement de ce phénomène et donc d'en sortir de premiers résultats assez rapidement qui permettront peut être de décider dans quelle(s) direction(s) poursuivre ses recherches et développer le modèle au cours de son étude.

2. Les modèles discrets (les systèmes masses-ressorts)

Dans la modélisation discrète, on suppose que la matière constituant une structure peut être représentée par un ensemble de sous structures, ou éléments discrets, ayant chacune un comportement propre. Le modèle discret le plus utilisé est le modèle masses-ressorts. Son nom est dû au fait que chaque élément a une masse propre et est relié aux autres éléments par un système complexe de ressorts symbolisant les interactions entre eux (Figure 3.1). Ces relations sont souvent caractérisées par un système dynamique du second ordre.

Cette approche a été développée initialement dans le domaine de la mécanique. Elle essaie de simuler la réalité physique de la matière, en la décomposant en un grand nombre de particules (les masses) liées entre elles (par des ressorts) de façon à pouvoir interagir. La résolution de ce système consiste à appliquer la deuxième loi de Newton (caractérisant le mouvement d'une masse ponctuelle) sur chaque particule, en prenant en compte les forces dues à ses interactions avec les particules voisines et celles dues à ses interactions avec le milieu extérieur. Les solutions des équations résultant de ce système dépendent des valeurs des forces (elles augmentent avec la rigidité des ressorts) et de leur nature (elles deviennent infinies si les forces sont discontinues, ce qui est le cas pour une collision).

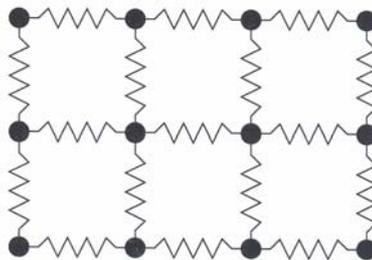


Figure 3.1 – Un objet peut être représenté par un ensemble de particules (masses ponctuelles) liées entre elles par des ressorts (voire des ressorts/amortisseurs). C'est un modèle masses-ressorts.

Le système masses-ressorts a intéressé de nombreux travaux de recherche grâce à :

- sa facilité de mise en œuvre : il suffit de définir les différentes particules à modéliser et de leur donner une masse pour avoir un «maillage» correspondant à la structure étudiée. Il faut ensuite attribuer les caractéristiques de raideur des ressorts, ce qui est moins aisé,
- sa capacité à refléter la réalité physique des matériaux, ce qui lui permet de simuler une large variété de comportements mécaniques, tels que la traction, la flexion, le mouvement, les déformations élastiques...
- sa complexité de résolution qui peut être assez faible si on se limite à une méthode de modélisation et de résolution linéaire par exemple.

Malgré ces intérêts, le système masses-ressorts pose certains problèmes pratiques :

- le premier et le plus pénalisant vient du fait que, dans la réalité physique des matériaux, un objet est constitué d'un très grand nombre de particules (si on

veut modéliser très précisément un objet on peut modéliser chaque atome), ce qui est pratiquement impossible à prendre en charge pour un ordinateur. Par conséquent, le modèle masses-ressorts perd son intérêt (i.e. sa vitesse) quand la simulation nécessite vraiment un tel nombre de particules,

- ce modèle donne, comme la plupart des modèles, une représentation paramétrée de l'objet. Donc, un objet peut avoir une infinité de comportements selon les valeurs de ses paramètres : élasticité, viscosité... Cela impose la résolution de deux problèmes supplémentaires. D'abord, il faut pouvoir saisir et représenter le comportement de l'objet à modéliser. Puis, il faut pouvoir contrôler le comportement du modèle pour qu'il ressemble à celui de l'objet réel. Ce dernier point est de loin le plus délicat. En effet, contrôler le comportement de quelques ressorts pour un petit modèle est relativement aisé. Mais, lorsque l'on dépasse un certain nombre de particules, la tâche devient beaucoup plus complexe non seulement à cause du nombre de ressorts liant les particules, mais aussi à cause de leurs interactions mutuelles qui rend le modèle très difficile à stabiliser sur un comportement précis,
- par ailleurs, il est difficile de faire correspondre le modèle masses-ressorts à ce qui se passe dans la réalité. Ainsi, on pourra observer un phénomène s'appliquant à la structure étudiée et mesurer son comportement (c'est la rhéologie) mais il sera délicat de régler tous les paramètres de tous les ressorts de façon à modéliser ce phénomène.

Bien que ce type de modélisation soit plus complexe que la modélisation analytique, elle reste relativement rapide du point de vue du temps de calcul grâce à sa simplicité algorithmique. C'est pour cela qu'elle est souvent utilisée en synthèse d'image, puisqu'elle permet de faire notamment des animations réalistes sans trop de temps de calcul, d'une manière simple et efficace. Cependant, ces modèles sont confrontés à des problèmes de stabilité, de contraintes globales (respect du volume de la structure notamment) et à la difficulté de retranscrire les mesures expérimentales (ou rhéologiques lorsqu'il s'agit de tissus biologiques) du phénomène étudié avec les paramètres du modèle masses-ressorts.

Le monde de la modélisation de structures anatomiques, avec ses géométries très complexes et ses multiples comportements pour un même organe (dûs notamment aux différentes structures s'imbriquant pour former cet organe), s'est en fait très rapidement orienté vers le développement de nouvelles techniques de modélisations, dont la plus utilisée actuellement est la modélisation continue.

3. Les modèles continus (la méthode éléments finis)

Les approches continues sont souvent préférées aux approches discrètes que nous venons de voir. En effet, même si elles sont beaucoup plus complexes, que ce soit pour la phase de définition du maillage ou pour la phase de calcul, elles sont généralement plus précises et plus fiables.

La modélisation continue est basée sur les équations de la mécanique des milieux continus, qui décrit mathématiquement, pour une structure donnée, les relations entre les contraintes qu'elle subit et les déformations qui en découlent (Bonnet et al. [ref]). Selon les déformations de la structure, on choisira une modélisation en «petites déformations» (pour les

déformations inférieures à 10 % de la taille de la structure) ou en «grandes déformations». Il est ensuite nécessaire de définir la loi de comportement qui modélisera le phénomène étudié. Cette loi détermine la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Elle est définie à partir de mesures *in vivo* ou *in vitro*. Nous reviendrons plus précisément sur ces conditions au cours du Chapitre 6.

Pour approcher au mieux la mécanique des milieux continus, une décomposition de la structure étudiée en un nombre infini d'éléments serait nécessaire pour résoudre les équations impliquées. Etant donné que la mémoire des ordinateurs est finie, les problèmes continus ne pourront pas être résolus tels quels. Les seuls problèmes qui peuvent être résolus exactement par des méthodes mathématiques sont très simples, donc loin des problèmes que l'on se pose sur des structures complexes comme la modélisation de structures anatomiques. Pour pouvoir résoudre ce genre de problèmes, il a fallu le développement de techniques de résolution impliquant une discrétisation, c'est-à-dire une approximation du problème continu. La discrétisation consiste en fait à estimer les déformations en fonction des contraintes externes en un nombre fini de points situés à la fois sur la surface de la structure étudiée et à l'intérieur de celle-ci. Contrairement aux modèles discrets pour lesquels la solution n'est qu'approchée, dans les modèles continus, la discrétisation permet de calculer une solution approchée sur un nombre fini de points mais celle-ci peut ensuite être interpolée de façon continue sur n'importe quel point de la structure modélisée. En prenant un très grand nombre d'éléments, c'est-à-dire en discrétisant finement, la modélisation gagne en précision, mais demande des calculs mathématiques très coûteux en temps. Pour cette raison, cette approche nécessite l'utilisation d'ordinateurs puissants.

Les mathématiciens et les ingénieurs ont proposé différentes approches pour la discrétisation des problèmes continus, comme les approximations par différences finies, des méthodes de résidus pondérés, ou en introduisant une approximation des éléments réels discrets par des éléments finis d'un milieu continu. C'est cette dernière approche, connue sous le nom de «méthode des éléments finis» [Zienkiewicz et Taylor, 1994, Touzot et Daht, 1984], qui est aujourd'hui la plus utilisée.

Selon Zienkiewicz, la méthode des éléments finis est une méthode d'approximation de problèmes continus telle que :

- Le milieu continu est subdivisé par des éléments simples (par exemple, en deux dimensions : des triangles, ou en trois dimensions : des hexaèdres) dont le comportement est défini par un nombre fini de paramètres.
- La résolution de la structure globale obtenue par l'assemblage de ses éléments respecte précisément les mêmes règles que celles qui régissent les structures discrètes.

Les logiciels de calcul basés sur la méthode des éléments finis sont largement commercialisés. Cette méthode permet de modéliser des matériaux isotropes ou anisotropes, des comportements élastique, élasto-plastique, plastique, fluide...

La modélisation continue permet de donner aux ingénieurs un moyen de connaître la répartition des contraintes et des déformations dans un milieu continu. Les applications peuvent aussi bien être en deux dimensions qu'en trois dimensions. Dans tous les cas, le nombre de discrétisations possibles est infini tant en terme de raffinement qu'en terme de position des éléments (Figure 3-2).

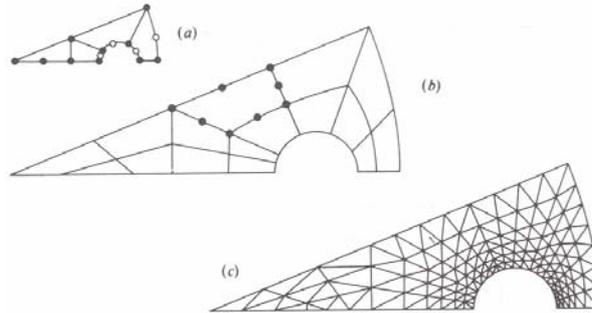


Figure 3.2 – Structures triangulaires avec trois niveaux de discrétisation différents. Il existe une infinité d'autres possibilités de discrétisation pour une telle figure. [Zienkiewicz et Taylor, 1994]

Pour trouver une discrétisation correcte :

- Le milieu est subdivisé en un certain nombre d'éléments finis séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires. La déformation est définie par morceaux sur chacun de ces éléments.
- Les éléments sont interconnectés en un nombre fini de nœuds. Les déplacements de ces points nodaux sont les inconnues de base du problème. Si le déplacement est connu à un nœud, alors c'est la contrainte qui est l'inconnue à ce nœud.
- Un ensemble de fonctions mathématiques d'interpolation permet de définir de façon unique les déplacements en tout point interne à l'élément en fonction des déplacements nodaux (ou les contraintes, si le déplacement est connu), ce qui permet de garder l'approche continue malgré la discrétisation due à la décomposition en éléments. La solution finale est donc continue sur l'ensemble du domaine.
- L'état de déformation à l'intérieur d'un élément est alors déterminé de façon unique en fonction de ces déplacements. L'état de contraintes dans l'élément, ainsi que sur ses frontières, est défini en fonction des déplacements déjà calculés, des déformations initiales éventuelles et des propriétés constitutives du matériau.
- Un système de forces appliquées aux nœuds équilibrant les charges réparties et les contraintes s'exerçant aux frontières est déterminé (et permet de conduire à une équation de raideur).

La résolution d'un problème ainsi discrétisé passe par quatre étapes :

- La première est la détermination des propriétés des éléments à partir de leur géométrie, des propriétés du matériau et des données de chargement. Cela permet de pouvoir formaliser localement le problème suivant la mécanique des milieux continus.
- La seconde étape est l'assemblage conduisant aux équations globales de comportement, basées sur la mécanique des milieux continus (contrairement aux systèmes masses-ressorts). Il est défini par une addition de toutes les contributions situées aux positions appropriées dans le système matriciel global. C'est-à-dire que les équations trouvées localement pour chaque élément

sont mises en commun lorsque les éléments partagent des nœuds (lorsqu'ils sont voisins).

- La troisième étape est la prise en compte des conditions aux limites (c'est-à-dire les forces appliquées au modèle) dans le système linéaire assemblé.
- Enfin, la dernière étape est la résolution du système matriciel finalement obtenu. Cette étape peut ensuite être suivie par le calcul de certaines contraintes ou d'autres grandeurs désirées pour l'interprétation des résultats.

Globalement, cette approche revient à minimiser l'énergie potentielle totale du système en fonction du champ des déplacements. Si le champ de déplacement est correctement défini, la méthode de résolution converge. La solution ainsi déterminée est une solution approchée puisque la structure a été discrétisée par les éléments du modèle.

Au cours de cette thèse, nous avons été amenés à créer et utiliser un modèle éléments finis des tissus mous de l'orbite. Nous développerons, dans le chapitre 6, la mécanique des milieux continus ainsi que les propriétés de la méthode des éléments finis utiles pour la compréhension de cette thèse.

Nous allons d'abord commencer, dans le prochain chapitre, par un état de l'art sur la modélisation des tissus intra-orbitaire.