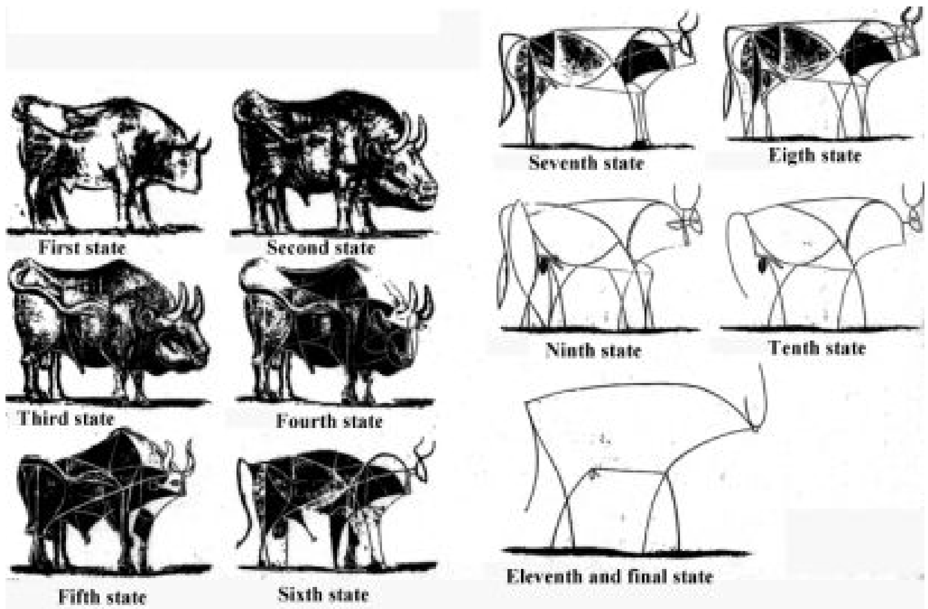
Ensimag 2e année **2004 -2005**



Notes de cours de Processus Aléatoires

Olivier François

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et Généralités

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et financier.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Ce cours présente quelques aspects des processus aléatoires utiles à l'ingénieur mathématicien du fait de leur fréquence d'occurrence dans les applications : processus de renouvellement, processus de Markov, mouvement brownien et intégrale stochastique.

1.1 Définitions

On appelle *processus aléatoire à temps continu* une famille $\{X_t \; ; \; t \in \mathcal{T}\}$ de variables aléatoires indicées par un paramètre réel positif. L'ensemble $\mathcal{T}$ représente un intervalle de temps, et le plus souvent la demi-droite $\mathbb{R}_+$. Les variables sont définies sur un même espace probabilisé. Dans ce cours, nous étudierons des processus à valeurs entières ou réélles. Nous identifierons parfois, de manière abusive et lorsque les ambiguités seront impossibles, processus et variables en notant (X_t) ou $\{X_t\}$ pour désigner le processus.

Pour une éventualité du hasard ω fixée, l'application qui à t associe la valeur $X_t(\omega)$ s'appelle une *trajectoire* du processus. Les trajectoires constituent généralement les observations concrètes que l'on peut faire d'un processus. Par exemple, les journaux publient chaque jour les trajectoires des valeurs boursières.

Un processus est *à valeurs entières* si

$$X_t \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Les exemples de processus à valeurs entières sont les processus de Poisson, les processus de renouvellement liés au comptage d'événements survenus au hasard, et par exemple les processus liés à l'état d'une file d'attente. Dans les files d'attente, la variable X_t représente en général le nombre de clients dans un système. Ce nombre peut croître ou décroître en fonction des durées et des stratégies de service. Les processus de branchement décrivant la taille d'une population sont aussi des exemples importants.

Un processus est *à valeurs réelles* si

$$X_t \in \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Les exemples de tels processus sont les mouvements browniens décrivant par exemple les cours des marchés financiers, les processus de Poisson composés ou les capitaux de sociétés (e.g., compagnies d'assurance).

La loi d'un processus aléatoire est caractérisé par la donnée des *lois fini-dimensionnelles*. En fait, on parle de la loi du processus $\{X_t \ ; \ t \geq 0\}$ lorsque l'on connait la loi du vecteur

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$$

pour toute suite finie croissante de temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$. Ce type de définition est peu agréable à vérifier ou à manipuler. Nous y ferons parfois référence de manière implicite afin de conserver la fluidité de notre discours.

Nous considèrons en particulier des processus à *accroissements indépendants*. Un accroissement du processus est tout simplement une variable aléatoire $\Delta_{s,t}$ égale à

$$\Delta_{s,t} = X_t - X_s \ , \quad t \geq s,$$

où s, t sont quelconques.

Définition 1.1.1 *Un processus $\{X_t\}$ tel que $X_0 = 0$ est à* **accroissements indépendants** *si, pour toute suite finie $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$, les variables aléatoires*

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Commentaires. On vérifie facilement qu'il suffit de connaitre la loi des accroissements pour caractériser la loi d'un processus à accroissements indépendants (c'est-à-dire en connaître les lois fini-dimensionnelles).

Définition 1.1.2 *Un processus à accroissements indépendants est à* **accroissements stationnaires** *si la loi de l'accroissement $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend pas de t, pour tout $t \geq 0$.*

1.2 Quelques exemples de processus

Parmi les plus élémentaires des processus, nous trouvons les processus de comptage qui seront bien étudiés par la suite.

Définition 1.2.1 Processus de comptage. *Un processus aléatoire $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de comptage si*

i) $N_0 = 0$ *;*

ii) $\forall\, s \leq t,\ N_s \leq N_t$.

Commentaires. Les trajectoires d'un tel processus sont donc des fonctions en escalier dont les marches sont de taille aléatoire. Les processus de comptage peuvent modéliser de nombreux phénomènes. Si l'on s'intéresse au nombre d'accès de clients à un serveur durant une période $(0, T)$, on observe en fait un processus de comptage sur cet intervalle de temps. De même, le nombre de particules détectées par un capteur ou le nombre de buts marqués lors d'un match de football peuvent être modélisés par des processus de comptage. Nous connaissons déjà un processus de comptage important (cf cours de 1A) : le processus de Poisson.

Définition 1.2.2 Processus de Poisson. *Un processus aléatoire $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si*

i) (N_t) *est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires ;*

ii) la variable N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

le processus de Wiener où *mouvement brownien* est le plus célèbre des processus à valeurs réelles. Sa découverte est due à l'observation du biologiste Brown, intéressé par les fluctuations aléatoires d'un grain de pollen dans un liquide. Le premier a avoir formalisé les propriétés du mouvement brownien n'est autre que A. Einstein dans un article fondamental écrit en 1905. Ce processus possède de nombreuses propriétés mathématiques : accroissements indépendants et stationnaires, processus gaussien, martingale, processus de Markov, équation de la diffusion. Cela explique que l'on puisse l'étudier très en détails. Il intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes comme une conséquence du théorème de tendance vers la loi normale. Les exemples importants sont en physique et en finance.

Définition 1.2.3 Processus de Wiener ou mouvement brownien. *Un processus aléatoire $\{W_t\ ;\ t \geq 0\}$ à valeurs réelles est un processus de Wiener ou mouvement brownien standard si*

i) (W_t) *est un processus à valeurs réelles à accroissements indépendants et stationnaires ;*
ii) la variable W_t *suit la loi normale de moyenne nulle et de variance* t.

Une classe de processus très importante en pratique et contenant les deux exemples précédents est celle des *processus de Markov*. Pour ces processus, l'évolution future de la variable étudiée conditionnellement à son passé jusqu'à l'instant présent ne dépend que de son état à l'instant présent. Nous étudierons en particulier les processus de Markov à valeurs entières, temporisation naturelle des chaînes de Markov à temps discret vues en première année (révisions indispensables).

1.3 Compléments sur la transformée de Laplace

La *transformée de Laplace* est un outil analytique fréquemment utilisé dans l'étude des variables aléatoires et des processus aléatoires. Nous trouverons de nombreuses opportunités d'application de cet outil dans la suite de ce texte. En particulier, il sera intéressant de l'utiliser lors de l'étude des processus de renouvellement, pour résoudre certaines équations fonctionnelles ou équations différentielles. Dans ce paragraphe, nous définissons la transformée de Laplace de certaines fonctions de $\mathbb{R}_+$ et nous montrons à travers quelques exemples l'intérêt technique de cet outil.

Définition 1.3.1 *Une fonction continue* f *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *est d'ordre exponentiel s'il existe* $\alpha > 0$, $t_0 > 0$ *et* $M > 0$ *tels que, pour tout* $t > t_0$,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \; .$$

La transformée de Laplace est définie comme un opérateur "intégral" sur l'ensemble des fonctions d'ordre exponentiel.

Définition 1.3.2 *On appelle transformée de Laplace d'une fonction* f *d'ordre exponentiel la fonction* Lf *définie par*

$$\forall s > \alpha \; , \quad Lf(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \; .$$

Commentaires. La transformée de Laplace d'une fonction d'ordre exponentiel est bien définie. En effet, pour tout $s > \alpha$,

$$\begin{aligned} |Lf(s)| &\leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt \\ &\leq \int_0^{t_0} |f(t)| e^{-st} dt + M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &\leq M_0 + M \frac{1}{s-\alpha} (1 - e^{-(s-\alpha)t_0}) < \infty \end{aligned}$$

Un propriété importante de l'opérateur de Laplace est qu'il détermine presque partout la fonction qu'il transforme.

Théorème 1.3.1 *Soient f et g deux fonctions d'ordre exponentiel identique. Supposons que*

$$\forall s > \alpha \ , \quad Lf(s) = Lg(s)$$

alors

$$f = g \quad \textit{presque partout.}$$

Démonstration. Résultat admis. ∎

Commentaires. Le premier commentaire concerne l'ordre commun. Supposer que deux fonctions sont de même ordre exponentiel n'est pas très restrictif. En effet, la définition de l'ordre est large et il est aisé de choisir le même α pour les deux fonctions. Le second commentaire est destiné à préciser la notion de *presque partout*. Cette terminologie signifie que le sous-ensemble de $I\!R_+$ pour lequel les fonctions f et g diffèrent est de mesure de Lebesgue nulle.

Exemple 1.3.1 *Transformée de Laplace d'une constante.*

Cherchons à calculer $L1(s)$ pour tout $s > 0$ (la constante 1 est évidemment une fonction d'ordre exponentiel pour laquelle α peut être choisi égal à 0).

$$\forall s > 0 \ , \quad L1(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} \ .$$

∎

Exemple 1.3.2 *Transformée de Laplace de l'exponentielle.*

Soit $a \in I\!R$. Cherchons à calculer $Le^{at}(s)$.

$$\forall s > a \ , \quad Le^{at}(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a} \ .$$

∎

Nous énonçons maintenant une propriété fondamentale de la transformée de Laplace. Elle transforme un produit de convolution en un produit de fonctions classique.

Proposition 1.3.1 *Soient f, g deux fonctions d'ordre exponentiel identique et α la constante correspondante. La transformée de Laplace du produit de convolution $f * g$ défini par*

$$\forall t > 0 \ , \quad f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx \ .$$

est égale à

$$\forall s > \alpha \ , \quad Lf * g(s) = Lf(s)Lg(s) \ .$$

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la transformée de Laplace du produit de convolution est bien définie pour $s > \alpha$. Effectuons le calcul

$$Lf * g(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(t-x)g(x)e^{-st}dxdt$$

en posant $u = t - x$ et $v = x$. Nous obtenons

$$Lf * g(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)g(v)e^{-s(u+v)}dudv \ .$$

Finalement, d'après le thérorème de Fubini

$$Lf * g(s) = Lf(s)Lg(s) \ .$$

■

Exemple 1.3.3 *Calculer, pour tout $s > 0$,*

$$Lt(s) \ , \quad Lt^2(s) \ , \quad Lt^n(s) \quad n \leq 1 \ .$$

Solution. Il suffit de remarquer que $t = 1 * 1(t)$. L'exemple 1.3.1 et la proposition 1.3.1 permettent d'écrire

$$Lt(s) = L1 * 1(s) = L1(s)L1(s) = \frac{1}{s^2} \ .$$

Par le même raisonnement, nous pouvons écrire

$$Lt^2(s) = 2L1 * t(s) = \frac{2}{s^3}$$

et

$$Lt^n(s) = nL1 * t^{n-1}(s) = \frac{n}{s}Lt^{n-1}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \ .$$

■

Exemple 1.3.4 *Résoudre l'équation fonctionnelle*

$$\forall s > 0 \ , \quad Lf(s) = \frac{1}{s(s+1)} \ .$$

Solution. On remarque que $Lf(s)$ peut être factorisée

$$\forall s > 0 \ , \quad Lf(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1} = L1(s)Le^{-t}(s) = L1 * e^{-t}(s) \ .$$

D'après le théorème 1.3.1, nous avons

$$\forall t > 0 \ , \quad f(t) = 1 * e^{-t} = \int_0^t e^{-x}dx = 1 - e^{-t} \ .$$

■

La transformée de Laplace se comporte de manière raisonnable vis à vis de la dérivation.

Proposition 1.3.2 *Soit f une fonction d'ordre exponentiel dérivable et dont la dérivée est continue. Alors*

$$\forall s > \alpha \quad Lf'(s) = sLf(s) - f(0) \ .$$

Démonstration. Nous avons

$$\forall s > \alpha \quad Lf'(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

Une intégration par parties (réalisée comme il se doit sur un intervalle borné) conduit au résultat suivant

$$Lf'(s) = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ .$$

■

Exemple 1.3.5 *Résoudre le système d'équations différentielles*

$$\begin{aligned} x' + 2y' - 2y &= t \\ x' + y' - y &= 1 \end{aligned}$$

avec la condition initiale $x(0) = y(0) = 0$.

Solution abrégée. En effectuant la transformation de Laplace des deux membres, on obtient, après identification

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t - t^2/2 \\ y(t) &= -t \ . \end{aligned}$$

■

Transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive Pour une variable réelle positive X admettant une densité, la transformée de Laplace est une notion voisine de la fonction caractéristique. Il s'agit en fait de la transformée de la densité

$$\forall s \in I\!R_+ , \quad L_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x) dx.$$

Cette fonction est à valeurs réelles donc plus facile à manipuler sur le plan théorique que la fonction caractéristique. Notons que les calculs à effectuer sont identiques dans les deux cas. Nous laissons au lecteur le soin d'en établir les principales propriétés à titre d'exercice en se reportant au paragraphe concernant la fonction caractérisque du cours de premiére année. Cette transformée est souvent préférée à la fonction caractéristique lorsque l'on travaille avec des variables à valeurs dans $I\!R_+$.

Exercice 1. Calculer la transformée de Laplace d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. En déduire l'espérance et la variance de cette variable.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F. Démontrer que

$$LF(s) = sL_X(s).$$

Exercice 3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$. Déterminer la transformée de Laplace de la variable

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1.4 Révisions de probabilité : la loi exponentielle

Lorsque l'on désire établir un modèle mathématique d'un phénomène réel, il est souvent nécessaire de faire de nombreuses hypothèses simplificatrices afin d'analyser le modèle de manière calculatoire. Une hypothèse simplificatrice souvent émise en pratique est que les phénomèmes aléatoires étudiés possèdent une certaine indépendance du passé, ou *absence de mémoire*. Dans ce cas, la loi de certaines variables aléatoires sera une loi exponentielle. Cette hypothèse simplificatrice se justifie du fait de la simplicité de calcul liée à la cette loi mais aussi du fait qu'elle constitue souvent une bonne approximation du phénomène réel. Par exemple, la loi exponentielle est la loi de la durée de vie d'un matériel qui ne s'use pas au cours du temps. Un tel matériel possède un taux de destruction (taux de panne) constant dans le temps. Cette propriété d'absence de mémoire sera mise en forme dans le premier paragraphe. La loi exponentielle sera la seule loi qui possèdera une telle propriété.

Cette section du cours de première année est replacée ici pour l'homogénéité du texte. Elle peut être sautée par les élèves à l'aise.

1.4.1 Définition

Une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \,. \end{cases}$$

Sa fonction de répartition est alors donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de la loi exponentielle est

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0,\ L(s) &= E[e^{-sX}] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + s} \,. \end{aligned}$$

Les moments de la variable X s'obtiennent par différenciations successives de la transformée de Laplace

$$\begin{aligned} E[X] &= L'(0) \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E[X^2] &= L''(0) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \,. \end{aligned}$$

Des deux équations précédentes, on déduit aisément

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \,.$$

Exercice 4. Résultat important. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que la loi de la variable S_n égale à $X_1 + \ldots + X_n$ est la loi Gamma $G(n, \lambda)$ de densité

$$f_{X_1 + \ldots + X_n}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}/(n-1)!\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \,. \end{cases}$$

1.4.2 Absence de mémoire

Définition 1.4.1 *Une variable aléatoire X est dite sans mémoire (ou sans usure) si*

$$\forall s, t \geq 0, \quad P(X > t + s \mid X > t) \ = \ P(X > s)\,. \tag{1.4.1}$$

Si X est la durée de vie d'un matériel quelconque, l'équation (1.4.1) s'interprète de la manière suivante. Sachant le matériel en état de bon fonctionnement au temps t, la loi de probabilité de sa durée de vie future est la même que celle de sa durée de vie initiale. En d'autres termes, le matériel ne s'use pas.

Proposition 1.4.1 *Une variable aléatoire de loi exponentielle est sans mémoire.*

Démonstration. La condition d'absence de mémoire (1.4.1) se formule de la manière suivante

$$\frac{\mathrm{P}(X > t + s\ ;\ X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \mathrm{P}(X > s)\,,$$

soit

$$\mathrm{P}(X > t + s) = \mathrm{P}(X > t)\,\mathrm{P}(X > s)\,. \tag{1.4.2}$$

La condition (1.4.2) est évidemment satisfaite par la loi exponentielle. ■

Proposition 1.4.2 *Une variable aléatoire sans mémoire suit la loi exponentielle .*

Démonstration. Soit X une variable possédant la propriété (1.4.1). On note

$$G(x) = \ \mathrm{P}(X > x)\,.$$

Nous venons d'observer que la fonction G était solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in I\!R_+\,, \quad g(x + y) = g(x)g(y)\,.$$

Un résultat d'analyse très classique garantit que les solutions continues (à droite) de cette équation sont de la forme

$$\forall x \in I\!R_+\,, \quad g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

Ainsi, nous devons avoir

$$\forall x \in I\!R_+\,, \quad \mathrm{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}\,.$$

■

La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle se traduit sur une grandeur appelée *taux de panne* ou *taux de hasard.*

Définition 1.4.2 *Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et de fonction de répartition F. On appelle taux de hasard la fonction définie par*

$$\forall t \geq 0\,, \quad r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}\,. \tag{1.4.3}$$

Cette grandeur s'interprète de la manière suivante. Supposons qu'un matériel de durée de vie X soit en état de bon fonctionnement au temps $t > 0$. On désire calculer la probabilité d'une panne dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$. Cette probabilité est égale à

$$\mathrm{P}(X \in (t, t+dt) \mid X > t) \,.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \in (t, t+dt) \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X \in (t, t+dt) \;;\; X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X \in (t, t+dt)\ )}{\mathrm{P}(X > t)} \\
&\simeq \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} \\
&= r(t)dt \,.
\end{aligned}$$

La fonction $r(t)$ représente le taux (conditionnel) avec lequel un matériel cesse de fonctionner à la date t. Pour la loi exponentielle, ce taux se doit d'être constant par absence d'usure. On vérifie bien

$$\forall t \geq 0 \,,\; r(t) = \lambda e^{-\lambda t}/e^{-\lambda t} = \lambda \,.$$

Proposition 1.4.3 *Soit X une variable aléatoire positive amettant une densité f. Le taux de hasard de X caractérise la loi de cette variable.*

Démonstration. Notons que l'équation (1.4.3) se formule de manière équivalente

$$\forall t \geq 0 \,, \quad r(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} \,.$$

En intégrant des deux cotés, on obtient

$$\ln(1 - F(t)) = -\int_0^t r(s)ds + k$$

soit

$$1 - F(t) = e^k \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} \,.$$

En prenant $t = 0$, on obtient, puisque $F(0) = 0$,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\} \,.$$

■

Exercice 5. Déterminer la loi d'une variable aléatoire dont le taux de panne est égal à

a) $r(t) = \lambda t \,,\; t \geq 0$,
b) $r(t) = e^{\lambda t} \,,\; t \geq 0$.

1.5 Exercices de révision de probabilité

Exercice 6. Mickey Markov vient de faire l'acquisition d'une Buick limousine modèle California de de 12 mètres de long. Mais il n'a pas pensé à ranger son garage pour pouvoir la rentrer chez lui. Alors, il doit la garer le long de la rue voisine comportant 12 places de parking. Huit véhicules plus modestes sont déja garés. Quelle chance ! Mickey trouve quatre places attenantes ! Mais cela est-il si surprenant ?

Exercice 7. (Source AB et David Bowie) L'engin spatial StarJojo piloté par le Major Tom s'éloigne de la terre à vitesse constante. Il envoie un message toutes les secondes, mais son système gyroscopique est défectueux et le message est envoyé dans une direction aléatoire, de sorte que la probabilité qu'un message envoyé à une distance r arrive à la station de contrôle est proportionnelle à $1/r^2$. Montrer qu'à partir d'un moment la station ne recevra presque sûrement plus de message en provenance du Major Tom ?

Exercice 8. (Source AB) On suppose que le nombre de clients présents au magasin Jojo Megastore suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Dans ce magasin, chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Quelle est la loi du nombre de portefeuille volés ?

Exercice 9. Montrer que si M et N sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $M + N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 10. (Source AB) **Cyclisme.** La distance maximale en km qu'un enfant de cinq ans accepte de parcourir sur son vélo avant de le laisser sur place est une variable aléatoire de loi de Poisson de moyenne 2. Le tour de l'étang de Saint-Pierre-lez-Echalotes fait trois kilomètres.

a) Calculer la probabilité pour un enfant de terminer le tour du lac à bicyclette.
b) Sept pères de famille accompagnent leurs enfants (un chacun) qui chevauchent fièrement leurs VTT dans un périple dominical autour du lac. On note N le nombre de pères qui termineront la grande boucle en portant le vélo de leur enfant. Déterminer la loi de N. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11. Soit n un entier strictement positif. Une particule décrit une marche aléatoire sur l'ensemble

$$E = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$$

de la manière suivante. On note (X_k) la suite des positions de la particule dans le temps. La position initiale de la particule est $X_0 = i$. Si $i < n$ alors la particule se déplace en $j = i + 1$. Si $i > n$ alors la particule se déplace en $j = i - 1$. Si $i = n$ alors la particule se déplace en une position j choisie au hasard de manière uniforme dans E mais différente de n. A partir de la position X_1, le processus est réitéré à l'identique.

a) Montrer que (X_k) est une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition.
b) On suppose $n > 2$. Montrer que la suite (X_k) converge en loi.
c) Déterminer la loi invariante de la chaîne (X_k).
d) On suppose $n = 2$. Déterminer la loi invariante de la chaîne (X_k). On suppose que $X_0 = 2$. Déterminer la loi de la variable X_k, pour tout k.
e) Calculer la position moyenne de la particule en régime stationnaire pour $n = 2$ et pour n quelconque.

Exercice 12. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ homogène, irréductible dont l'espace d'état E est fini. Soit $(p_{ij})_{i,j\in E}$ la matrice de transition associée. Pour tout couple i, j d'éléments de E, on note $f_{ij}^{(n)}$ la probabilité pour que le premier passage en j partant de i ait lieu au temps n.

a) Montrer, pour tout $i, j \in E$,

$$f_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n)}.$$

b) On pose $m_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$. Que représente cette grandeur ? Montrer

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj}.$$

Exercice 13. Problème de la sentinelle.

Joe Blacksmith est enrolé dans le XX^{e} de cavalerie dans un fort du désert de l'Arizona. C'est son jour de sentinelle. Il doit garder le fort dont la géométrie et celle d'un pentagone. Enervé par la monotonie du paysage, il décide de se déplacer d'un sommet à l'autre du pentagone selon une marche au hasard avec une probabilité p d'aller dans le sens des aiguilles d'une montre et $1 - p$ d'aller dans le sens contraire. Pas de chance pour Joe, c'est ce jour là que Chacal Raleur, un indien sioux (et rusé de surcroit), cherche à s'introduire dans le fort par l'un des 5 sommets.

a) Décrire les transitions de la chaîne de Markov associée à la marche de Joe. Quelle est la loi stationnaire de cette chaîne ?
b) Sachant que Joe parcourt une arête du pentagone en dix minutes et ayant observé qu'il vient de quitter un sommet, quel sommet Chacal va-t-il choisir ? De combien de temps peut-il espérer disposer (Application : on prend $p = \frac{1}{3}$) ?

Exercice 14. Un message électronique doit être transmis par l'utilisateur d'une machine A vers l'utilisateur d'une machine C. Ce transfert s'effectue par l'intermédiaire d'une machine B. Mais Mickey Markov est administrateur du réseau et il y a parfois des messages perdus ou détruits. On suppose que

- le transfert de A vers B est effectif avec la probabilité p et échoue avec la probabilité $1-p$. En cas d'échec, le message est retourné à l'utilisateur A ;
- le transfert de B vers C est effectif avec la probabilité q et échoue avec la probabilité $1-q$. En cas d'échec, le message est à nouveau retourné à l'utilisateur A ;
- en cas d'échec, A renouvelle l'envoi du message ;
- tous les transferts sont indépendants entre eux.

On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la succession des machines sur lesquelles le message transite.

a) Démontrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\{A, B, C\}$, de condition initiale $X_0 = A$, dont on écrira le matrice de transition P.

b) On s'intéresse au nombre N de transitions nécessaires pour que le message atteigne son destinataire :

$$N = \inf\{n \geq 1 \ , \ X_n = C\}.$$

1) Démontrer que, pour tout entier n,

$$\mathrm{P}(N \leq n) = p_{AC}^{(n)}$$

où $p_{AC}^{(n)}$ est le coefficient correspondant à la ligne A et à la colonne C de la matrice P^n, puissance n^{e} de P.

2) En utilisant l'identité

$$P^{n+1} \ = \ P \ P^n \ ,$$

démontrer la relation suivante :

$$p_{AC}^{(n+1)} = (1-p) \ p_{AC}^{(n)} + p(1-q) \ p_{AC}^{(n-1)} + pq \ .$$

3) Existe-t-il une suite constante solution particulière de l'équation de recurrence

$$u_{n+1} = (1-p) \ u_n + p(1-q) \ u_{n-1} + pq \ ?$$

4) Que valent $p_{AC}^{(0)}$ et $p_{AC}^{(1)}$?

– On suppose maintenant $p = q = \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = u_n - 1$. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation de récurrence satisfaite par la suite $\{v_n\}_{n\geq 0}$?

5) En déduire $\mathrm{P}(N \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Calculer $E[N]$.

Chapitre 2

Processus de renouvellement

Il s'agit dans ce chapitre d'étudier des processus aléatoires constitués de séries d'événements pour lesquelles les durées séparant les occurrences sont des variables aléatoires strictement positives indépendantes et de même loi. Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un exemple de référence pour une telle famille de processus. En ce qui concerne le processus de Poisson, les variables inter-occurrences sont de loi exponentielle de paramètre λ. Les processus de renouvellement interviennent dans la modélisation de phénomènes liés par exemple au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système, aux instants d'arrivée de clients dans une file d'attente, à l'occurrence de sinistres pour une compagnie d'assurance etc

2.1 Définitions

2.1.1 Processus et fonction de renouvellement

Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Un processus de renouvellement est un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ représentant les instants d'occurrence d'un événement tel que les durées inter-occurrences successives sont des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, de fonction de répartition F. Un tel processus peut être défini indifféremment par

- la suite (X_n) des durées entre les occurrences successives,
- la suite (T_n) des instants d'occurrences

$$\forall n \geq 1 \; , \quad T_n = X_1 + \ldots + X_n \; ,$$

- le processus de comptage $\{N_t \; ; \; t \geq 0\}$ où N_t représente le nombre d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$. En effet, on passe du processus de comptage aux instants d'occurrence par la relation suivante

$$\forall n \geq 0 \; , \quad (N_t \geq n) = (T_n \leq t) \; . \tag{2.1.1}$$

En premier lieu, nous cherchons à caractériser la loi de la variable T_n égale au n^{e} instant d'occurrence. Soit F_n la fonction de répartition de la variable T_n. Bien entendu, nous avons

$$F_1 = F$$

et

$$T_n = T_{n-1} + X_n \; .$$

La formule établie dans le cours de première année montre que

$$F_2(x) = \int_0^\infty F(x-y)dF(y) = \int_0^x F(x-y)dF(y) \; .$$

De même, nous pouvons écrire

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y)dF(y) \; .$$

D'après l'équation (2.1.1), nous obtenons la loi de la variable N_t pour tout $t \geq 0$. En effet, nous avons

$$\forall n \geq 0 \; , \quad \mathrm{P}(N_t \geq n) = F_n(t) \; .$$

L'espérance de la variable N_t définit pour tout $t \geq 0$ une grandeur particulièrement importante appelée *fonction de renouvellement*.

Définition 2.1.1 *On appelle fonction de renouvellement, la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$\forall t \geq 0 \; , \quad M(t) = E[N_t] \; .$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 2.1.1

$$\forall t \geq 0 \; , \quad M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \; .$$

Démonstration. La démonstration utilise le fait suivant

$$E[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(N_t > n) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \; .$$

■

La fonction de renouvellement est donc définie comme une somme de fonctions de répartition. Cela lui confère un certain nombre de propriétés immédiates. En particulier, la fonction M est croissante, continue à droite et

$$\lim_{t \to \infty} M(t) = +\infty \; .$$

Puisque les T_n sont positives, nous avons $M(0) = 0$. Enfin, il est utile de remarquer que $M(t)$ est toujours bien définie. Ce résultat mérite un peu d'attention. Il est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.1.2

$$\forall t \geq 0 \; , \quad M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty \; .$$

Démonstration. Nous avons, pour tout $m \leq n$

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-m}(t-y) dF_m(y) \; .$$

Comme F_{n-m} est croissante,

$$\forall y \leq t \; , \quad F_{n-m}(t-y) \leq F_{n-m}(t) \; .$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\forall 1 \leq m \leq n-1 \; , \quad F_n(t) \leq F_{n-m}(t) F_m(t)$$

De même, pour tout $r \geq 1$ et $0 \leq k \leq r-1$

$$\begin{aligned} F_{nr+k}(t) &\leq F_{(n-1)r+k}(t) F_r(t) \\ &\leq F_k(t) [F_r(t)]^n \; . \end{aligned}$$

Pour tout $t \geq 0$, il existe un $r \geq 1$ tel que $F_r(t) < 1$. Ceci implique que la série converge au moins aussi vite qu'une série géométrique. ■

Exemple. Soit $0 < t < 1$. On considère le processus de renouvellement associé à la loi uniforme sur l'intervalle $(0,1)$.

a) Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \geq 1 \; , \quad \mathrm{P}(T_n \leq t) = \frac{t^n}{n!}.$$

b) Démontrer que

$$\forall 0 < t < 1 \; , \quad M(t) = e^t - 1 \; .$$

Solution abrégée. Nous avons

$$\forall 0 < t < 1 \; , \quad F_1(t) = t$$

et

$$F_n(t) = (F_{n-1} * 1)(t) = \frac{t^n}{n!}.$$

Le résultat suit facilement. ■

Nous donnons l'expression de la transformée de Laplace de la fonction de renouvellement. Ce résultat sera utile dans la section suivante.

Proposition 2.1.3 *La transformée de Laplace de la fonction de renouvellement est égale à*

$$\forall s > 0, \quad LM(s) = \frac{LF(s)}{1 - Lf(s)} = \frac{L_X(s)}{s(1 - L_X(s))}$$

où f est la densité de la loi de renouvellement et L_X la transformée de cette densité.

Démonstration. Nous avons

$$\forall s > 0, \quad LM(s) = \sum_{n=1}^{\infty} LF_n(s).$$

Or $LF_n(s) = LF_{n-1}(s)Lf(s)$, et par récurrence,

$$LF_n(s) = LF(s)\,(Lf(s))^{n-1}.$$

Le résultat annoncé provient de la série géométrique de raison $Lf(s) < 1$. ■

2.1.2 Temps résiduel. Temps courant.

Nous donnons quelques définitions usuelles concernant les processus de renouvellement. Il s'agit des *temps résiduel et courant*.

Définition 2.1.2 *Pour tout $t \geq 0$, on définit*
- *le temps résiduel courant*
$$\gamma_t = T_{N_t+1} - t$$
- *l'âge courant*
$$\delta_t = t - T_{N_t}$$
- *le temps total courant*
$$\beta_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$$

associés à un processus de renouvellement donné.

Commentaires. Le temps résiduel courant est à l'instant t le temps qu'il reste à attendre pour la prochaine occurrence du processus. En guise d'illustration, il s'agit du temps que l'on passe à l'arrêt d'autobus lorsque l'on arrive à l'instant t (dans cet exemple, une occurrence est représentée par l'arrivée d'un bus). L'âge courant est la durée séparant la date courante t de la dernière occurrence du processus et le temps total courant est la somme des deux temps précédents

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t = X_{N_t+1}\ .$$

2.1.3 Exemples

Nous terminons cette section en présentant deux exercice simples illustrant l'intérêt des processus de renouvellement.

Exemple 1 : Des trous dans le gruyère. Une suite de requêtes arrivent à un serveur selon un processus de renouvellement dont la loi inter-arrivées a pour fonction de répartition F. Au temps $t = 0$, le serveur lance l'exécution une tâche dont la durée est déterminée et vaut $C > 0$. Lorsqu'elle est interrompue par l'arrivée d'une requête, l'exécution de cette tâche est annulée puis réinitialisée et relancée immédiatement après l'arrivée de la requête. Pour mener à bien l'exécution de la tâche, le serveur doit donc attendre le premier intervalle de renouvellement d'une durée supérieure à C.

a) Soit N le rang de l'intervalle de temps dans lequel l'exécution de la tâche pourra être achevée. Quelle est la loi de la variable aléatoire N ? Exprimer sa fonction génératrice G_N.
b) Soit T le temps d'attente du premier intervalle de renouvellement d'une durée supérieure à C. Donner l'expression de T en fonction de N. Calculer la transformée de Laplace de T.
c) Déduire $E[T]$ de la question précédente.
d) On suppose que les requêtes arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner l'expression de $E[T]$ en fonction de λ.

Solution abrégée.

a) La variable N égale au rang de l'intervalle dans lequel l'exécution de la tâche pourra être achevée est une variable de loi géométrique de paramètre

$$p = 1 - F(C) \ .$$

Sa fonction génératrice est donc égale à

$$\forall |z| < 1 \ , \quad G_N(z) = \frac{(1 - F(C))z}{1 - F(C)z} \ .$$

b) Notons tout d'abord que la loi conditionnelle de X sachant $X \leq C$ admet pour densité

$$\forall x \leq C \ , \quad f_X^{X \leq C}(x) = \frac{f(x)}{F(C)}.$$

De plus, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire ${}^T(X_1, \ldots, X_{n-1})$ sachant que $N = n$ admet pour densité

$$\forall i, \forall x_i \leq C \ , \quad f_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}^{N=n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{F(C)}$$

où f est la densité commune des (X_i). Puisque,

$$T = X_1 + \ldots + X_{N-1} + C \ ,$$

nous avons

$$\begin{aligned} E[e^{-sT}] &= e^{-sC} E[E[e^{-s(X_1+\ldots+X_{N-1})} \mid N]] \\ &= e^{-sC} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(N=n) \left(\int_0^C e^{-sx} \frac{f(x)}{F(C)} dx \right)^{n-1} . \end{aligned}$$

En utilisant la série géométrique, nous obtenons

$$\forall s > 0 \, , \quad L_T(s) = e^{-sC} \frac{1 - F(C)}{1 - \int_0^C e^{-sx} f(x) dx} \, .$$

c) Nous obtenons par dérivation

$$E[T] = C + \frac{\int_0^C x f(x) dx}{1 - F(C)} \, .$$

Cette formule est évidemment équivalente à la suivante

$$E[T] = C + E[N-1] E[X | (X < C)] \, .$$

d) Dans le cas de la loi exponentielle, nous trouvons

$$E[T] = \frac{e^{\lambda C} - 1}{\lambda}$$

■

Exercice 15. Processus de défaillance.

Un système dont on suppose la réponse instantanée est sollicité à des instants aléatoires (T_n) suivant un processus de renouvellement dont la loi a pour fonction de répartition F. À chaque sollicitation, le système a une probabilité p d'être défaillant. On suppose que les défaillances sont indépendantes du processus de sollicitations.

a) Montrer que la suite des instants successifs de défaillance définit un processus de renouvellement.
b) Donner l'expression de la transformée de Laplace de la loi associée aux instants de défaillance en fonction de Lf, où f est la densité de la loi F.
c) Donner l'expression de la fonction de renouvellement.
d) Décrire le processus de défaillance lorsque F est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Solution abrégée. Notons Y_1 l'instant de la première défaillance. Nous avons

$$Y_1 = X_1 + \cdots + X_N$$

où N est de loi $\mathcal{G}(p)$, indépendante des (X_n). Les hypothèses d'indépendance garantissent que le processus de défaillance est un processus de renouvellement dont la loi est identique à celle de Y_1. Nous avons

$$L_Y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(N = n)(L_X(s))^n = \frac{pL_X(s)}{1 - qL_X(s)}.$$

En notant M_p la fonction de renouvellement du processus des défaillances, nous avons

$$LM_p(s) = \frac{L_Y(s)}{s(1 - L_Y(s))} = \frac{1}{s}\frac{pL_X(s)}{1 - L_X(s)} = pLM(s).$$

Nous avons donc

$$\forall t \leq 0, \quad M_p(t) = pM(t).$$

Lorsque les X_n sont de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, nous avons

$$L_Y(s) = \frac{p\lambda}{p\lambda + s},$$

et Y suit la loi $\mathcal{E}(p\lambda)$. Dans ce cas, nous verrons que le processus de sollicitation est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et retrouverons cette propriété classique d'extraction plus loin. ∎

2.2 Processus de Poisson

2.2.1 Processus de Poisson et renouvellement

Le processus de Poisson a été présenté durant le cours de première année. Intuitivement, il s'agit de compter le nombre d'occurrences d'événements qui surviennent au hasard et indépendamment les uns des autres au cours du temps. La définition classique du processus de Poisson est la suivante.

Définition 2.2.1 *Le processus de comptage $\{N_t \,;\, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, si*

i) le processus est à accroissements indépendants ;

ii) le nombre d'occurrences dans un intervalle de temps quelconque de longueur t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

$$\forall\, s, t \geq 0\,, \quad P(N_{t+s} - N_s = n) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!\ ,\ n = 0, 1, ...$$

Commentaires. Il vient immédiatement d'une telle définition qu'un processus de Poisson est un processus à accroissements stationnaires et de plus

$$E[N_t] = \lambda t\,.$$

Dans cette section, nous donnons une autre définition du processus de Poisson, vu comme un processus de renouvellement.

Définition 2.2.2 *Soit (X_n) un processus de renouvellement de loi F égale à la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit*

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n, \text{ pour } n \geq 1; \quad T_0 = 0.$$

Le processus de comptage $\{N_t \,;\, t \geq 0\}$ défini par

$$N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$$

est appelé processus de Poisson de taux $\lambda > 0$.

Pour comprendre la raison de l'appellation *processus de Poisson* (plutôt que processus exponentiel), cherchons la loi de N_t pour un t fixé. Tout d'abord, notons que

$$\forall n \in I\!N\,,\ \forall t > 0\,, \quad N_t \geq n \quad \Longleftrightarrow \quad T_n \leq t\,. \tag{2.2.2}$$

Les variables aléatoires T_n sont définies comme somme de n variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Par conséquent, T_n suit la loi Gamma $G(n, \lambda)$. Montrons qu'une variable N_t définie à partir de la relation (2.2.2) suit la loi de Poisson de paramètre λt. Soit $n \in I\!N$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_t \geq n) &= \mathrm{P}(T_n \leq t) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} I_n \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I_n = [\frac{x^n}{n} e^{-\lambda x}]_0^t + \int_0^t \lambda \frac{x^n}{n} e^{-\lambda x} ds\,.$$

Donc

$$\mathrm{P}(N_t \geq n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!} I_{n+1}\,.$$

Par conséquent, puisque le dernier terme est égal à $\mathrm{P}(N_t \geq n+1)$,

$$\mathrm{P}(N_t = n) = \mathrm{P}(N_t \geq n) - \mathrm{P}(N_t \geq n+1) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\,.$$

Notons qu'il est possible de faire cette démonstration directement à l'aide de la transformée de Laplace. En effet, nous avons

$$LF_n(s) = s^{-1} \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^n = s^{-1} LG(n, \lambda)(s).$$

Par ailleurs, nous avons

$$\mathrm{P}(N_t = n) = \mathrm{P}(T_n \leq t) - \mathrm{P}(T_{n+1} \leq t).$$

Ainsi, nous avons après simplification

$$L\ \mathrm{P}(N_t = n)(s) = \lambda^{-1} \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^{n+1} = \lambda^{-1} LG(n+1, \lambda)(s)$$

Le résultat suit par inversion de la transformée de Laplace.

2.2.2 Équivalence des définitions

Afin de vérifier l'équivalence des deux définitions, nous devons en particulier vérifier que les accroissements sont indépendants et stationnaires. Nous supposons que le processus de Poisson est défini comme un processus de renouvellement et nous procédons en deux étapes (lemmes).

Lemme 2.2.1 *Soit $s > 0$. Le processus défini par $L_t = N_{t+s} - N_s$, pour tout $t \geq 0$ est encore un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Il est indépendant de N_r, quel que soit $r \leq s$.*

Démonstration. Nous donnons en fait l'idée de la démonstration peu agréable à formaliser. Imaginons pour fixer les idées que $N_s = 4$. Ainsi, il y a eu 4 occurrences aux temps $T_1 = t_1$, $T_2 = t_2$, $T_3 = t_3$ et $T_4 = t_4$. Nous savons alors que le temps séparant la quatrième et la cinquième occurrence doit vérifier

$$X_5 > s - t_4.$$

Puisque la loi exponentielle est sans mémoire, nous avons

$$\mathrm{P}(X_5 > t + (s - t_4) \mid X_5 > s - t_4) = \mathrm{P}(X_5 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Ceci montre que la loi de la première arrivée du processus L_t est la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et que la première arrivée dans le processus décalé est indépendante des T_i $(i \leq 4)$. Ce résultat anticipe par ailleurs sur la description du temps résiduel pour le processus de Poisson. La loi de ce temps est exponentielle de paramètre λ. ■

Lemme 2.2.2 *Le processus (N_t) est à accroissements indépendants. Si $t_0 < t_1 < \ldots \leq t_n$, alors*

$$N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}},$$

sont des variables indépendantes.

Démonstration. D'après le premier lemme, $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ est indépendant de $N_{t_1} - N_{t_0}$, ... , $N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}}$. Le résultat annoncé s'obtient par recurrence. ■

Ces lemmes traduisent une propriété fondamentale de renouvellement. Intuitivement, le processus redémarre de la même manière à n'importe quel instant positif. À tout instant, l'état du processus est indépendant de tous les états passés du processus. En d'autres termes, il s'agit d'un processus sans mémoire.

Démonstration de l'équivalence des propositions. Les lemmes précédents donnent la première implication (la définition 2.2.2 entraîne la définition 2.2.1). La réciproque est fournie par le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 *Supposons que le processus de Poisson est défini par la définition 2.2.1. Alors les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre λ.*

Démonstration. Notons, tout d'abord, que l'événement $(X_1 > t)$ se réalise si et seulement si il n'y a aucune occurrence du processus de Poisson dans l'intervalle $(0, t)$. Ainsi,

$$\mathrm{P}(X_1 > t) = \mathrm{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t} .$$

Donc X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. De plus,

$$\mathrm{P}(X_2 > t) = E[\, \mathrm{P}(X_2 > t \mid X_1)] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X_2 > t \mid X_1 = s)\lambda e^{-\lambda s} ds .$$

Calculons

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_2 > t \mid X_1 = s) &= \mathrm{P}(0 \text{ occurrence dans } (s, s+t) \mid X_1 = s) \\ &= \mathrm{P}(0 \text{ occurrence dans } (s, s+t)) \\ &= \mathrm{P}(N_{t+s} - N_s = 0) \\ &= e^{-\lambda t} . \end{aligned}$$

Les deux dernières équations découlent de la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires du processus de Poisson. On conclut que X_2 suit la loi exponentielle de paramètre λ et qu'elle est indépendante de X_1. En répétant cet argument pour tout $n > 2$, on démontre la proposition. ■

Commentaires. Nous avons vu en première année et justifierons à nouveau dans la suite une troisième définition du processus de Poisson. Cette dernière définition met l'accent sur la caractérisation du processus de Poisson comme processus de Markov. Dans ce contexte, l'équivalence avec le renouvellement de loi exponentielle apparaîtra immédiat.

Définition 2.2.3 *Le processus de comptage $\{N_t \,;\, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, si*

i) le processus est à accroissements indépendants et stationnaires ;
ii) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$;
iii) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

2.2.3 Temps résiduel et courant. Le paradoxe de l'inspection.

Considérons donc le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ comme un processus de renouvellement de fonction de répartition

$$\forall t \geq 0 , \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t} .$$

Par définition, la fonction de renouvellement est égale à

$$\forall t \geq 0 , \quad M(t) = E[N_t] .$$

La variable aléatoire N_t admet pour loi la loi de Poisson de paramètre λt. En conséquence, nous avons

$$\forall t \geq 0 \ , \quad M(t) = \lambda t \ .$$

Le temps résiduel courant est tel que

$$\forall x \geq 0 \ , \quad \mathrm{P}(\gamma_t > x) = \mathrm{P}(N_{t+x} - N_t = 0) = \mathrm{P}(N_x = 0) = e^{-\lambda x} \ .$$

La loi du temps résiduel est donc la loi exponentielle de paramètre λ. Le temps résiduel a donc même loi que les durées inter-occurrences. Ceci peut paraître paradoxal puisque le temps résiduel est toujours plus court que la durée séparant les occurrences précédant et suivant l'instant où il est mesuré. Il est aussi remarquable que la loi du temps résiduel ne dépende pas de t. En fait, ces propriétés traduisent l'absence de mémoire du processus de Poisson et de la loi exponentielle.

L'âge courant ne peut être supérieur à t. Mais, pour tout $x < t$,

$$\mathrm{P}(\delta_t > x) = \mathrm{P}(N_t - N_{t-x} = 0) = \mathrm{P}(N_x = 0) = e^{-\lambda x} \ .$$

La fonction de répartition de cette variable aléatoire est donc donnée par

$$F_{\delta_t}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \leq t \ , \\ 1 & \text{si } x \geq t \ . \end{cases}$$

Il s'agit de la loi exponentielle tronquée en t.

L'espérance du temps total courant vaut donc

$$E[\beta_t] = E[\gamma_t] + E[\delta_t] = \frac{1}{\lambda}[1 + (1 - e^{-\lambda t})] \ .$$

Il faut remarquer que la loi de la variable β_t est différente de la loi exponentielle (loi des durées inter-occurrences). L'identité précédente conduit en effet au paradoxe suivant

$$E[\beta_t] = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda} > E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$$

Lorsque t tend vers l'infini, le temps total courant séparant deux occurrences successives du processus de Poisson est en moyenne deux fois plus long que la durée inter-occurrences moyenne. Ce paradoxe est appelé parfois appelé *paradoxe de l'inspection.* L'inspection, i.e. l'observation de l'état du processus au temps t, a pour effet d'agrandir la durée moyenne d'attente de l'occurrence suivante.

La loi conjointe du couple (γ_t, δ_t) se détermine de la même manière

$$\forall x \geq 0 \ , 0 \leq y \leq t \ , \quad \mathrm{P}(\gamma_t > x, \delta_t > y) = \mathrm{P}(N_{t+x} - N_{t-y} = 0) = \mathrm{P}(N_{x+y} = 0) \ .$$

Ainsi, nous obtenons

$$\mathrm{P}(\gamma_t > x, \delta_t > y) = \begin{cases} e^{-\lambda(x+y)} & \text{si } 0 \leq y < t \ , \\ 0 & \text{si } y \geq t \ . \end{cases}$$

Ceci démontre que les variables aléatoires γ_t et δ_t sont indépendantes. Cette propriété, équivalente à l'absence de mémoire, caractérise le processus de Poisson. ■

2.2.4 Quelques exemples liés au processus de Poisson

Ce premier exemple présente un moyen de construire algorithmiquement des réalisations de la loi de Poisson. Pour simuler le processus, nous verrons plus tard une autre méthode de simulation fondée sur le conditionnement (qui s'avère plus efficace en pratique).

Exemple 2.2.1 *Soit λ un réel positif. La loi de la variable N en sortie de l'algorithme suivant*

```
X <-   1
N <-  -1
Repeter
X <-  X * ALEA
N <-  N + 1
Tant que ( X > exp(-lambda) )
```

est la loi de Poisson de paramètre λ.

Solution. Pour un entier n fixé, on cherche à calculer la probabilité de l'événement $(N \geq n)$. La loi de N, caractérisée par sa fonction de répartition, se déduira de ce calcul. On note $(U_i)_{i\geq 1}$ la suite des appels au générateur $ALEA$.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \ , \ \mathrm{P}(N \geq n) &= \mathrm{P}(\ (U_1 > \exp(-\lambda)) \ \cap \cdots \cap (\ U_1 U_2 \cdots U_n > \exp(-\lambda))\ ) \\ &= \mathrm{P}(\ U_1 U_2 \cdots U_n > \exp(-\lambda)\ ) \end{aligned}$$

car les événements $(U_1 U_2 \cdots U_i > \exp(-\lambda))_{i\geq 1}$ sont emboités. En passant au logarithme, on obtient

$$\mathrm{P}(N \geq n) = \ \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n} -\ln(U_i) \leq \lambda).$$

Les variables $X_i = -\ln(U_i)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(1)$. Si l'on introduit un processus de Poisson $\{\tilde{N}_t \ , \ t \geq 0\}$ de paramètre 1, on peut écrire

$$\mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \lambda) = \ \mathrm{P}(\tilde{N}_\lambda \geq n).$$

Ceci conduit à

$$\mathrm{P}(\tilde{N}_\lambda \leq n) = \mathrm{P}(N \leq n)$$

et N suit la loi de Poisson de paramètre λ. ■

L'exemple que nous présentons maintenant est particulièrement important. Il montre que si l'on extrait des occurrences au hasard dans un processus de Poisson avec une probabilité fixe, on obtient de nouveau un processus de Poisson.

Exemple 2.2.2 *Soit $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les occurrences successives du processus peuvent être classées selon deux types que l'on note type I et type II. On suppose de plus que lorsqu'une occurrence survient, elle est de type I avec probabilité p indépendamment de toutes les autres occurrences du processus. On note respectivement N_t^1 et N_t^2 les nombres d'occurrences de type I et de type II survenues dans l'intervalle de temps $[0,t]$.*

a) À $t \geq 0$ fixé, quelle est la loi du couple (N_t^1, N_t^2) ? (On pourra conditionner à l'événement $(N_t = k)$, $k \geq 0$.)

b) En déduire, pour tout $t \geq 0$, la loi de la variable N_t^1.

c) Montrer, pour tout $t \geq 0$, que les variables aléatoires N_t^1 et N_t^2 sont indépendantes.

d) Montrer que $\{N_t^1;\ t \geq 0\}$ et $\{N_t^2;\ t \geq 0\}$ sont des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.

Solution 1. En remarquant que $N_t = N_t^1 + N_t^2$, il devient judicieux de conditionner à la valeur de la variable N_t. Ainsi, pour tout $k, l \in I\!\!N$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_t^1 = k\ ;\ N_t^2 = l) &= E[\ \mathrm{P}(N_t^1 = k\ ;\ N_t^2 = l \mid N_t)\ ] \\ &= \mathrm{P}(N_t^1 = k\ ;\ N_t^2 = l \mid N_t = k+l)\ \ \mathrm{P}(N_t = k+l) \end{aligned}$$

Il existe bien sûr C_{k+l}^k manières d'ordonner k occurrences de type I parmi $k+l$ occurrences de types I et II. Ceci donne, compte tenu que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_t^1 = k\ ;\ N_t^2 = l) &= C_{k+l}^k\, p^k\, (1-p)^l\, e^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^{k+l}}{(k+l)!} \\ &= \frac{(\lambda p t)^k}{k!}\, \frac{(\lambda(1-p)t)^l}{l!}\, e^{-\lambda p t}\, e^{-\lambda(1-p)t} \end{aligned}$$

Les variables N_t^1 et N_t^2 sont donc indépendantes (la loi du couple se factorise) et de loi de Poisson de paramètres respectifs $p\lambda t$ et $(1-p)\lambda t$.
On montre de la même façon que les accroissements $N^1(t+s) - N_t^1$ et $N_{t+s}^2 - N_t^2$, $t,\ s \geq 0$ sont également poissoniens de paramètres $p\lambda s$ et $(1-p)\lambda s$.
En se référant au cours (p. 189), le processus $\{N_t^1\ ;\ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $p\lambda$ si l'on montre que ses accroissements sont indépendants. Soient $s, t > 0$, on peut écrire

$$\mathrm{P}(N_s^1 = k\ ;\ N_{t+s}^1 - N_s^1 = l) = E[\ \mathrm{P}(N_s^1 = k\ ;\ N_{t+s}^1 - N_s^1 = l \mid N_s\ ;\ N_{t+s} - N_s)].$$

En conditionnant aux variables N_s et $N_{t+s} - N_s$, on fait disparaitre l'aléa lié au nombre total d'occurrences au temps $t+s$. Les accroissements $N_{t+s}^1 - N_s^1$ et N_s^1 ne dépendent plus que des tirages de type I ou II et sont donc indépendants (conditionnellement à N_s et $N_{t+s} - N_s$). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N_s^1 = k\ ;\ N_{t+s}^1 - N_s^1 = l) &= E[\ \mathrm{P}(N_s^1 = k \mid N_s\ ;\ N_{t+s} - N_s) \\ &\quad \times \mathrm{P}(N_{t+s}^1 - N_s^1 = l \mid N_s\ ;\ N_{t+s} - N_s)] \\ &= E[\ \mathrm{P}(N_s^1 = k \mid N_s)\ ] \\ &\quad \times E[\ \mathrm{P}(N_{t+s}^1 - N_s^1 = l \mid N_{t+s} - N_s)] \\ &= \mathrm{P}(N_s^1 = k)\ \ \mathrm{P}(N_{t+s}^1 - N_s^1 = l) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

où l'on a utilisé, pour la deuxième identité, l'indépendance des accroissements N_s et $N_{t+s} - N_s$ du processus de Poisson $\{N_t \ ; \ t \geq 0\}$. Le même raisonnement s'applique avec un nombre fini d'accroissements du processus $\{N_t^1 \ ; \ t \geq 0\}$ comme du processus $\{N_t^2 \ ; \ t \geq 0\}$. ■

Solution 2. Puisque (N_t) est un processus de renouvellement, et que les types sont affectés indépendamment de (N_t), il est clair que (N_t^1) est aussi un processus de renouvellement. Soit Y_1 l'instant de première occurrence, nous avons

$$L_{Y_1}(s) = G_N(L_{X_1}(s)) = \frac{pL_{X_1}(s)}{1-(1-p)L_{X_1}(s)}.$$

Or, nous avons

$$L_{X_1}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}, \quad s > 0$$

et

$$L_{Y_1}(s) = \frac{p\lambda}{\lambda + s} \frac{\lambda + s}{\lambda + s - (1-p)\lambda} = \frac{p\lambda}{p\lambda + s}.$$

On reconnait la transformée de Laplace de la loi $\mathcal{E}(p\lambda)$. ■

2.2.5 Loi conditionnelle des instants de renouvellement

Soit $\{N_t \ ; \ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Nous supposons que le nombre d'occurrences au temps t est égal à n. Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que les n premiers instants d'occurrence sont répartis de la même manière que des variables indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle de temps $(0, t)$ et rangées dans l'ordre croissant. On dit dans ce cas que les variables correspondent aux statistiques d'ordre d'un échantillon de loi uniforme. Nous donnons ci-dessous une définition précise.

Définition 2.2.4 *Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires à valeurs réelles. On dit que $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre correspondant à $X_1, \ldots, X_n$ si, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $X_{(k)}$ est la k^e plus petite valeur parmi $X_1, \ldots, X_n$.*

Convention. S'il y a égalité entre certaines variables, la statistique d'ordre est mal définie. On décidera en cas d'égalité pour $X_{(k)}$ de choisir la variable de plus petit indice parmi les ex aequo. Cette situation critique n'intervient jamais dans la suite car les variables que nous considèrons admettent une loi à densité.

Proposition 2.2.2 *On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi de densité f. Alors, la densité f^* du vecteur $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ est*

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{1}_{\{x_1 < \ldots < x_n\}} .$$

Démonstration. Considérons la permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ et la transformation φ_σ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même qui permute les coordonnées du vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n , \quad \varphi_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) .$$

Alors, pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset \{x_1 < \ldots < x_n\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\, (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) \in A) &= \sum_\sigma \mathrm{P}(\, (X_1, \ldots, X_n) \in \varphi_\sigma(A)) \\ &= \sum_\sigma \int_{\varphi_\sigma(A)} f(x_1) \ldots f(x_n) dx_1 \ldots dx_n . \end{aligned}$$

Le changement de variable (linéaire)

$$(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_\sigma^{-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

dans chacun des termes de la somme conduit, en remarquant que

$$|\mathrm{Jac}\varphi_\sigma| = 1,$$

à

$$\mathrm{P}(\, (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) \in A) = n! \int_A f(y_1) \ldots f(y_n) dy_1 \ldots dy_n$$

où $n!$ représente bien entendu le nombre de permutations des n indices. ■

Proposition 2.2.3 *La loi conditionnelle des instants de renouvellement $(T_1, \ldots, T_n)$ sachant $(N_t = n)$ est celle de n variables indépendantes de loi uniforme sur $(0, t)$ rangées dans l'ordre croissant. Elle admet pour densité*

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n , \quad f_{(T_1,\ldots,T_n)}^{N_t=n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\ldots<t_n\leq t\}} .$$

Démonstration. Soient $0 < t_1 \cdots < t_n \leq t$. Utilisons les variables inter-occurrences (X_i). L'observation

$$(T_1 = t_1 \,; \cdots ; \, T_n = t_n \,; \, N_t = n)$$

se réalise si et seulement si

$$(X_1 = t_1 \,; \, X_2 = t_2 - t_1 \,; \cdots ; \, X_n = t_n - t_{n-1} \,; \, X_{n+1} > t_n - t)$$

se réalise aussi. Or, les (X_i) sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Ceci implique que

$$f_{(T_1,\ldots,T_n)}^{N_t=n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{\mathrm{P}(N_t = n)} f_{X_1}(t_1)\, f_{X_2}(t_2 - t_1) \ldots f_{X_n}(t_n - t_{n-1}) \mathrm{P}(X_{n+1} > t_n - t) .$$

Après simplification, nous obtenons

$$f_{(T_1,\ldots,T_n)}^{N_t=n}(t_1,\ldots,t_n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda(t-t_n)}}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n}.$$

■

Commentaires. Ce résultat nous permet de proposer un algorithme permettant d'obtenir une réalisation du processus de Poisson sur l'intervalle $(0,t)$. On commence par simuler une variable N selon la loi de Poisson de paramètre λt. Puis on fait appel N fois au générateur aléatoire pour obtenir N variables de loi uniforme sur l'intervalle $(0,t)$. Il suffit ranger ces variables dans l'ordre croissant afin d'obtenir les instants d'occurrence du processus. En langage R (ou S), cette simulation peut s'écrire

```
> N <- rpois(1, lambda *t)  #simule la loi de Poisson
> U <- runif(N, 0, t) #echantillon de taille N de loi uniforme sur (0,t)
> T <- sort(U) #tri rapide
```

En sortie, la variable T contient les instants d'occurrence du processus de Poisson de paramètre λ au temps t. Si $N = 0$, la situation est triviale, $T_0 = 0$.

Le résultat possède un intérêt applicatif certain. Il permet de justifier que l'on puisse *faire comme si* les variables T_i étaient indépendantes et de loi uniforme pour le calcul de certaines espérances.

Proposition 2.2.4 *Soient $T_1 < \cdots < T_n$ les instants d'occurrence d'un processus de Poisson homogène $\{N_t \;;\; t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $(0,t)$. Soit g une fonction de la variable réelle, intégrable sur $(0,t)$. Alors*

$$E[g(T_1)\ldots g(T_n) \mid N_t = n] = \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(u)du\right)^n = E[g(U)]^n .$$

Soient $Y_1,\ldots,Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Soit h une fonction de deux variables réelles telle que $E[h(U,Y_1)] < \infty$. Alors

$$E[h(T_1,Y_1)\ldots h(T_n,Y_n) \mid N_t = n] = E[h(U,Y_1)]^n .$$

Démonstration. Nous démontrons la première affirmation. La seconde est laissée en exercice. La démonstration repose sur la remarque que

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n) = g(t_1)\cdots g(t_n)$$

est invariante par la permutation des coordonnées. De plus, nous avons

$$E[g(T_1)\ldots g(T_n) \mid N_t = n] = \frac{n!}{t^n}\int_{t_1\leq\cdots\leq t_n\leq t} g(t_1)\cdots g(t_n)dt_1\cdots dt_n.$$

Ainsi, en considérant toutes les permutations, nous avons

$$E[g(T_1)\dots g(T_n) \mid N_t = n] = \frac{1}{t^n} \sum_{\sigma} \int_{t_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq t_{\sigma(n)} \leq t} g(t_1)\cdots g(t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

Cela revient à intégrer sur $(0,t)^n$

$$E[g(T_1)\dots g(T_n) \mid N_t = n] = \frac{1}{t^n} \int_{(0,t)^n} g(t_1)\cdots g(t_n) dt_1 \cdots dt_n.$$

et le résultat découle du théorème de Fubini. ■

Nous terminons ce paragraphe par un exemple où le conditionnement intervient de manière utile. Cet exemple est représentatif d'un problème de stock. Il pourrait tout aussi bien concerner un organisme biologique.

Exemple 2.2.3 *Une organisation non-gouvernementale dispose d'une ressource initiale $u \geq 0$. Des subventions arrivent à cet organisme selon un processus de Poisson $\{N_t \; ; \; t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$. La n^e subvention augmente les ressources dont dispose l'organisme d'une variable aléatoire Y_n ($n \geq 1$) de fonction de répartition F. les variables (Y_n) sont indépendantes. Les ressources sont dispersées par l'organisme à une vitesse qui est proportionnelle à leur quantité selon un coefficient de proportionnalité α. Conditionnellement à l'absence d'arrivée de subventions dans l'intervalle $[0,t]$, la quantité de ressources R_t dont dispose l'organisme au temps t est solution de l'équation*

$$R' = -\alpha R$$

avec la condition initiale $R_0 = u$. Nous cherchons à déterminer la loi de la variable R_t, et plus précisement sa transformée de Laplace, pour en déduire par exemple l'espérance de R_t.

Solution. L'intégration de l'équation différentielle qui dirige le comportement de R_t conduit au résultat suivant

$$\forall t \geq 0 \, , \quad R_t = \sum_{k=0}^{N_t} Y_k \exp(-\alpha(t - T_k))$$

où l'on a posé $Y_0 = u$ et noté T_k l'instant d'arrivée de la k^e occurrence du processus de Poisson. Afin de donner l'expression de la transformée de Laplace de R_t, nous considérons que les arrivées du processus de Poisson sont indépendantes et distribuées de manière uniforme dans $[0,t]$ conditionnellement à $N_t = n$. Ainsi, d'après la proposition précédente,

$$\forall s > 0 \, , E[e^{-s\sum_{k=0}^{N_t} Y_k \exp(-\alpha(t-T_k))} \mid N_t = n] = e^{-su\exp(-\alpha t)} E[e^{-sY_1 \exp(-\alpha(t-U))}]^n$$

où U est une variable de loi uniforme sur $[0, t]$. En intégrant suivant les valeurs possibles de N_t, on obtient

$$\forall s, t \geq 0 \ , \quad L_{R_t}(s) = \exp\left(-sue^{-\alpha t} - \lambda \int_0^t 1 - L_{Y_1}(se^{-\alpha x})dx\right) \ .$$

Si l'on dérive en 0 (sous le signe somme), on obtient

$$E[R_t] = ue^{-\alpha t} - \lambda \int_0^t e^{-\alpha x} L'_{Y_1}(0)dx = ue^{-\alpha t} + \frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})E[Y_1] \ .$$

Nous voyons que la valeur moyenne des ressources disponibles au temps t converge rapidement vers une constante

$$\lim_{t\to\infty} E[R_t] = \frac{\lambda}{\alpha} E[Y_1].$$

■

2.2.6 Exercices

Exercice 16. Soient $\{N_t \ ; \ t \geq 0\}$ et $\{M_t ; \ t \geq 0\}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$L_t = N_t + M_t.$$

Montrer que $\{L_t ; \ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Solution abrégée. Utiliser la définition du processus de Poisson comme un processus de renouvellement. En superposant les deux processus, la loi de la première occurrence Z_1 est égale à la loi du minimum des temps de première occurence de chacun des deux processus

$$Z_1 = \min\{X_1, Y_1\}.$$

Puisque X_1 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et Y_1 suit la loi $\mathcal{E}(\mu)$, nous obtenons que Z_1 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$. L'indépendance des variables inter-occurrences provient de l'absence de mémoire de la loi exponentielle (indépendance du passé et temps résiduel de loi exponentielle). ■

Exercice 17. Sachant qu'une occurrence exactement d'un processus de Poisson de paramètre λ a eu lieu dans l'intervalle de temps $(0, t)$, montrer que la loi de l'instant de cette occurrence dans l'intervalle est la loi $\mathcal{U}(0, t)$.

Solution abrégée. Soit $x \leq t$, nous avons

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x \mid N_t = 1) = \frac{\mathrm{P}(N_x = 1 \, ; \, N_t - N_x = 0)}{\mathrm{P}(N_t = 1)}.$$

En utilisant l'indépendance des accroissements, nous avons

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x \mid N_t = 1) = \frac{\lambda x}{\lambda t} \frac{e^{-\lambda(x+t-x)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t}$$

■

Exercice 18. Soient $\{N_t^1;\ t \geq 0\}$ et $\{N_t^2;\ t \geq 0\}$ deux processus de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On note S_n^1 et S_m^2 les instants respectifs des n^{e} et m^{e} occurrences des processus $\{N_t^1;\ t \geq 0\}$ et $\{N_t^2;\ t \geq 0\}$.

a) On suppose $n = m = 1$. Montrer que

$$\mathrm{P}(S_2^1 < S_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\ .$$

b) On suppose $n = 2$ et $m = 1$. En conditionnant à l'événement $(S_2^1 < S_1^2)$, montrer que

$$\mathrm{P}(S_1^1 < S_1^2) = (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})^2.$$

c) Montrer, pour tout $n, m > 0$, que

$$\mathrm{P}(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})^k (\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2})^{n+m-1-k}.$$

(superposer les processus N_1 et N_2)

Exercice 19. Soit $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et n un entier positif. Montrer, pour tout $0 \leq s < t$ et tout $0 \leq k \leq n$, que

$$\mathrm{P}(N_s = k | N_t = n) = C_n^k (\frac{s}{t})^k (1 - \frac{s}{t})^{n-k}\ .$$

En d'autres termes, la loi conditionnelle de la variable N_s sachant $N_t = n$ est la loi binomiale de paramètres n et s/t.

Exercice 20. Au football, on suppose que les buts sont marqués aux instants d'un processus de Poisson (N_t) de paramètre $\lambda > 0$. Dans ce problème, nous nous intéressons aux parties qui se sont terminées avec 2 buts marqués. La durée d'une partie est une constante notée T.

1) Soit $0 < s < t < T$ et $C_T = [0, T] \times [0, T]$ le carré de coté T. On définit l'ensemble

$$D(s, t) = \{(t_1, t_2) \in C_T\ ,\ t_1 \leq s,\ t_2 \leq t,\ t_1 \leq t_2\}.$$

Dessiner cet ensemble.

2) On considère deux variables X et Y indépendantes, de loi uniforme sur $(0,T)$ et le couple (X',Y') construit en rangeant X et Y dans l'ordre croissant. À l'aide d'un raisonnement géométrique, montrer que

$$\forall 0 < s < t < T, \quad \mathrm{P}(X' \leq s; Y' \leq t) = 2\,\mathrm{P}((X,Y) \in D(s,t)).$$

En déduire que la fonction de répartition du couple (X',Y') vérifie

$$\forall 0 < s < t < T, \quad \mathrm{P}(X' \leq s; Y' \leq t) = \frac{2st - s^2}{T^2}.$$

3) Soit T_1 l'instant du premier but et T_2 l'instant du second. Justifier l'égalité suivante

$$\forall 0 < s < t < T, \quad \mathrm{P}(T_1 \leq s; T_2 \leq t) = \mathrm{P}(N_s \geq 1; N_t = 2 \,|\, N_T = 2).$$

4) En utilisant l'indépendance des accroissements du processus de Poisson, montrer que

$$\forall 0 < s < t < T, \quad \mathrm{P}(T_1 \leq s; T_2 \leq t) = \frac{2st - s^2}{T^2}.$$

(On prendra soin de bien distinguer deux cas, selon que deux buts sont marqués à l'instant s ou non.)

5) Comment simuler les deux instants de but à l'aide d'un générateur aléatoire de loi uniforme ?

Exercice 21. Soit $\lambda(u)$ une fonction positive, définie sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur tout intervalle de la forme $(0,t)$, $t > 0$. On pose

$$\forall t \geq 0, \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du.$$

On dit que le processus de comptage (N_t) est un processus de Poisson non-homogène si

i) (N_t) est à accroissements indépendants ;

ii) $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t) - \Lambda(s)$, pour tout couple (s,t) tel que $s < t$.

1) Soit T_1 l'instant de première occurrence du processus. Calculer la probabilité de l'événement $(T_1 > t)$. En déduire la loi de T_1.

2) On note T_2 l'instant de deuxième occurrence du processus. Exprimer l'événement

$$A_{s,t} = (T_1 > s\,;\, T_2 > t), \quad 0 < s < t,$$

en fonction des accroissements N_s et $(N_t - N_s)$. Calculer la probabilité

$$G(s,t) = \mathrm{P}(A_{s,t}).$$

3) En déduire l'expression de la densité conjointe du couple (T_1, T_2)

$$\forall 0 < t_1 < t_2, \quad f(t_1, t_2) = \lambda(t_1)\lambda(t_2)e^{-\Lambda(t_2)}.$$

(Indication : On pourra utiliser la relation $f = \partial G / \partial s \partial t$.)

4) Soit $X_1 = T_1$ et $X_2 = T_2 - T_1$. Déterminer la densité conjointe du couple (X_1, X_2). Les variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 22. Mickey Markov rend visite à son ami Khalid qui est rentré au bled pour aider sa mémé Aziza à garder les chèvres quelque part entre Marrakech et Agadir. Depuis peu, il y a une belle quatre-voies qui coupe le pays et cela oblige Aziza et Khalid à faire un détour de 10 km pour mener les chèvres au point d'eau le plus proche. Traverser la route avec tout le troupeau prend environ 3 minutes et les véhicules, bien visibles de très loin, passent en moyenne toutes les minutes. Combien de temps en moyenne va durer l'attente avant de pouvoir faire traverser tout le troupeau ? Application : Loi uniforme.

Exercice 23. Mickey Markov est dans le Larzac au concert de soutien de José Bové. Mais il fait très chaud et le bar ne sert que la piquette bio d'un petit producteur du Languedoc. Mickey va se désaltérer en moyenne toutes les 30 minutes. Cela a pour effet d'accroître son taux d'ébriété de 0.05 g (d'alcool dans le sang). L'alcool est dégradé de manière constante à raison de 0.1 g par heure. Au début, Mickey est à jeun. Quel est son taux moyen d'ébriété après 4h, 8h ?

Exercice 24. L'intervalle $(0, 1)$ est muni de sa tribu de Borel. Soit $0 < t < 1$ et I_t un sous-ensemble mesurable de $(0, 1)$ de mesure de Lebesgue

$$\lambda(I_t) = t\ .$$

Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre égal à 1.0. On choisit aléatoirement de manière uniforme et indépendante N points de l'intervalle $(0, 1)$. On note N_t le nombre de points appartenant à I_t.

a) Soit $n \geq 0$. Quelle est la loi conditionnelle de la variable N_t sachant que $N = n$? En déduire que

$$E[N_t | N = n] = nt\ .$$

b) Calculer $E[N_t]$.
c) Déterminer la loi de la variable N_t.
d) Montrer que $\mathrm{Cov}(N_t, N) = t$.
e) On suppose que T est une variable aléatoire indépendante de N et du tirage des points dans $(0, 1)$ admettant pour densité

$$f(t) = (e-1)^{-1} e^t\ \mathbb{1}_{(0,1)}(t)\ .$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire N_T. Calculer $E[N_T]$.

Exercice 25. Soit $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que chaque occurrence de ce processus est susceptible d'être classée selon k types. On suppose, de plus, que la probabilité pour qu'une occurrence soit de type i dépend de l'instant t de cette occurrence et vaut $p_i(t)$ ($\sum_{i=1}^k p_i(t) = 1$) indépendamment des autres occurrences.

a) Soit N_t^i, $i = 1, \ldots, k$ le nombre d'occurrences de type i survenues à l'instant $t > 0$. Démonter que, conditionnellement à l'événement $(N_t = n)$, $n > 0$, la probabilité qu'il y ait une occurrence de type i dans l'intervalle $[0, t]$ est

$$p_i = \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds.$$

b) Calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathrm{P}(N_t^1 = n_1, \ldots, N_t^k = n_k \mid N_t = \sum_{i=1}^k n_i = n).$$

c) Déterminer la loi du n-uplet $(N_t^1, \ldots, N_t^k)$ pour tout $t > 0$. En déduire que les variables N_t^i sont des variables de loi de Poisson de moyennes respectives égales à

$$E[N_t^i] = \lambda \int_0^t p_i(s) ds, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Exercice 26. Transformée de Laplace du processus de Poisson.

On appelle *transformée de Laplace* d'un processus de comptage $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonctionnelle Ψ définie sur le cône $\mathcal{C}^+$ des fonctions mesurables réelles positives sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathrm{R}^+))$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$ par :

$$\Psi(f) = E[e^{-\int_0^\infty f(t) dN_t}].$$

a) Démontrer que la transformée de Laplace du processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ vaut pour tout $f \in \mathcal{C}^+$:

$$\Psi(f) = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty (1 - e^{-f(t)}) dt\right) .$$

On prouvera tout d'abord ce résultat pour l'indicatrice d'un sous ensemble borné de $\mathbb{R}^+$ puis on utilisera le fait que f est limite croissante de combinaisons linéaires positives de telles fonctions.

b) Un organisme de planification désire modéliser le temps nécessaire à une découverte ou à la production d'un résultat par une équipe de recherche dans un domaine donné, par une variable T appelée temps d'innovation. On suppose que :

i) l'équipe acquiert des connaissances nouvelles qui surviennent au cours du temps selon un processus de Poisson homogène $\{N_t \; ; \; t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$.

ii) Conditionnellement à ce processus, le *taux instantanné d'innovation* est, à chaque instant t, proportionnel au nombre de connaissances acquises jusqu'à cet instant, c'est à dire pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha^{\{N_u;0\leq u\leq t\}}(t) &:= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t; \{N_u; 0 \leq u \leq t\}) \\
&:= \frac{f_T^{\{N_u;0\leq u\leq t\}}(t)}{1 - F_T^{\{N_u;0\leq u\leq t\}}(t)} \\
&= \alpha N_t, \;\; \alpha > 0.
\end{aligned}$$

1. Démontrer
$$\forall t \geq 0, \;\; 1 - F_T^{\{N_u;0\leq u\leq t\}}(t) = \exp(-\int_0^t \alpha N_u du).$$

2. Démontrer
$$\int_0^t \alpha N_u du = \int_0^\infty g(s) dN_s, \quad g(s) = \alpha 1_{[0,t]}(s)(t-s).$$

3. En déduire
$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\lambda(t - (1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha})\right) \;\; ; \quad t \geq 0.$$

4. Calculer la densité de T.

5. Déterminer le taux d'innovation $\alpha(t)$, $t \geq 0$. Tracer sa courbe représentative et interpréter.

Pour toute fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, l'intégrale stochastique prise par rapport au processus de Poisson est définie par

$$\int_a^b f(t) dN_t = f(b) N_b - f(a) N_a - \int_a^b N_t f'(t) dt.$$

2.3 Equations de renouvellement et applications

Cette section à caractère théorique a pour objectif d'établir les principaux résultats liés au comportement asymptotique des processus étudiés. Il s'agit pour l'essentiel de résultats d'analyse portant sur une famille d'équations intégrales connues sous le nom d'*équations de renouvellement.*

2.3.1 La fonction de renouvellement comme solution d'une équation fonctionnelle

Une fonction croissante G définie sur $\mathbb{R}_+$ continue à droite et telle que $G(0) = 0$ induit une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ muni de sa tribu de Borel. Une telle mesure se note α et se définit grâce aux valeurs prises sur les intervalles de $\mathbb{R}_+$

$$\forall 0 \leq a \leq b\ , \quad \alpha((a,b]) = G(b) - G(a)$$

On dit parfois que α est une *mesure de Lebesgue-Stieljes*. Une fonction de répartition fournit un exemple standard d'une telle mesure. Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré que la fonction de renouvellement M fournissait aussi un exemple de mesure de Lebesgue-Stieljes (mais, dans ce cas précis, la mesure n'est pas bornée). L'intégrale se note

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\alpha = \int_0^\infty f(x) dG(x)\ .$$

L'un des objectifs de la théorie du renouvellement est de décrire le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement M et plus généralement le comportement asymptotique du processus lui-même. Pour atteindre cet objectif, nous avons besoin de montrer que M est solution d'une certaine équation fonctionnelle.

Proposition 2.3.1 *On considère un processus de renouvellement de loi F et de fonction de renouvellement M. Alors,*

$$\forall t \geq 0\ , \quad M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x)\ .$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser le "renouvellement" en conditionnant à l'instant de première occurrence du processus. Soit $t > 0$, nous avons

$$M(t) = E[E[N_t | X_1]]\ .$$

Or, nous avons

$$E[N_t | X_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x\ , \\ 1 + M(t-x) & \text{si } x \geq t\ . \end{cases}$$

Finalement, en intégrant, nous obtenons

$$M(t) = \int_0^\infty E[N_t | X_1 = x] dF(x) = \int_0^t (1 + M(t-x)) dF(x)\ .$$

■

Cette équation, dite de renouvellement, possède des propriétés que nous allons détailler dans les paragraphes suivants.

Commentaires. En prenant la transformée de Laplace, l'équation

$$\forall t \geq 0\ , \quad M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x)$$

devient

$$\forall s > 0 \ , \quad LM(s) = LF(s) + LM(s)(sLF(s)).$$

Ainsi, nous retrouvons de manière simple la transformée de Laplace de la fonction de renouvellement

$$LM(s) = \frac{LF(s)}{1 - sLF(s)}.$$

■

2.3.2 Solution des équations de renouvellement

Soit F une fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $F(0) = 0$. On appelle *équation de renouvellement associée à F*, toute équation intégrale de la forme

$$\forall t \geq 0 \ , \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x) \tag{2.3.4}$$

où A est un fonction inconnue et a est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ donnée.

Commentaires. Bien entendu, la fonction de renouvellement est solution d'une équation de renouvellement. Dans ce cas précis, nous avons $a(t) = F(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Comme dans le paragraphe précédent, nous utilisons les notations suivantes

$$\forall t \geq 0 \ , \quad F_1(t) = F(t)$$

et, de proche en proche, pour tout n

$$\forall t \geq 0 \ , \quad F_n(x) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)dF(x) \ .$$

Le théorème suivant est un résultat d'analyse qui nous sera utile par la suite.

Théorème 2.3.1 *Soit a une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et* **bornée**. *Alors, l'équation de renouvellement associée à F*

$$\forall t \geq 0 \ , \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x)$$

admet une solution unique, bornée sur tout intervalle fini, donnée par

$$\forall t \geq 0 \ , \quad A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x)$$

où

$$\forall t \geq 0 \ , \quad M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \ .$$

Démonstration. Utiliser la transformée de Laplace. ■

Commentaires. Le résultat est immédiat pour la fonction de renouvellement. Nous pouvons le vérifier à l'aide de l'intégration par parties, ou bien de la transformée de Laplace. En effet, l'équation

$$\forall t \geq 0 \ , \quad M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)$$

se transforme en

$$\forall s > 0 \ , \quad LM(s) = LF(s) + LM(s)(sLF(s)) = LF(s) + (sLM(s))LF(s).$$

Cette dernière factorisation montre que

$$\forall t \geq 0 \ , \quad M(t) = F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x).$$

■

Le résultat possède de nombreuses implications pour les processus de renouvellement. Notons F la fonction de répartition des durées inter-occurrences. Rappelons que, pour tout entier n, T_n est l'instant de n^{e} occurrence du processus.

Proposition 2.3.2 *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que $E[X_1] = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$, alors*

$$E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + E[N_t]) \ .$$

Démonstration. Posons

$$A(t) = E[T_{N_t+1}]$$

et conditionnons à la valeur de la variable X_1. Puisque

$$E[T_{N_t+1}|X_1 = x] = \begin{cases} x & \text{si } t < x \ , \\ x + A(t-x) & \text{si } x \geq t \ , \end{cases}$$

nous obtenons, après intégration,

$$A(t) = \int_0^t x + A(t-x)dF(x) + \int_t^\infty x dF(x) = E[X_1] + \int_0^t A(t-x)dF(x) \ .$$

Ainsi, d'après le théorème 2.3.1,

$$A(t) = E[X_1] + E[X_1]\int_0^t dM(x) = E[X_1](1 + M(t)) \ .$$

■

Commentaires. À l'instant t, nous avons

$$T_{N_t+1} = X_1 + \ldots + X_{N_t+1} \ .$$

En moyenne, l'instant de la prochaine occurrence est égal à $M(t)+1$ fois la moyenne d'une durée inter-occurrence. Nous aurions obtenu un résultat similaire si les variables (X_i) étaient indépendantes de N_t (formule de Wald). Cette condition n'est bien entendu pas vérifiée. Toutefois, N_t+1 est ce que l'on appelle un *temps d'arrêt* et la formule de Wald se généralise aux temps d'arrêt (voir l'exercice suivant).

Exercice 27. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et telle que $E[X_1] < \infty$. On dit que N est un temps d'arrêt pour la suite (X_n), si l'événement $(N \leq n)$ ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$. Soit $\{N_t \ ; \ t \geq 0\}$ un processus de renouvellement de loi F

a) Montrer que $N = N_t + 1$ est un temps d'arrêt.
b) Montrer que N_t n'est pas un temps d'arrêt.
c) Supposons que $E[N] < \infty$. Démontrer la **formule de Wald**

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[X_1]E[N].$$

d) En déduire une nouvelle démonstration du résultat

$$E[T_{N_t+1}] = E[X_1](1 + M(t)).$$

Solution abrégée. Nous avons

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{(N \geq i)}.$$

Puisque N est un temps d'arrêt, l'événement $(N \leq i-1)$ est indépendant de $X_i, X_{i+1}, \ldots$. Or, nous avons

$$E[S_N] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i \mathbb{1}_{(N \geq i)}]$$

et

$$E[X_i \mathbb{1}_{(N \geq i)}] = E[E[X_i \mathbb{1}_{(N \geq i)} | X_i, X_{i+1}, \ldots]] = E[X_i \ E[\mathbb{1}_{(N \geq i)}]].$$

On en déduit que

$$E[S_N] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X_1] \mathrm{P}(N \geq i) = E[N]E[X_1].$$

■

2.3.3 Exemples et exercices

Nous traitons quelques exemples significatifs, énoncés sous forme d'exercice.

Exercice 28. Création d'entreprise.
Une société de service est sollicitée pour des contrats de durées aléatoires. Nous supposons que les instants de sollicitation (T_n) forment un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Par ailleurs, les durées des contrats (C_n) forment un processus de renouvellement de loi F. Toute sollicitation tombant au cours d'un contrat est perdue. Nous nous intéressons à l'instant T où pour la première fois un contrat est perdu. On note

- $V(t)$ la probabilité qu'aucune sollicitation ne soit perdue entre 0 et t, sachant qu'un contrat commence à l'instant 0 ;
- $U(t)$ la probabilité qu'aucune sollicitation ne soit perdue entre 0 et t.

a) Impliquer V dans une équation fonctionnelle similaire à une équation de renouvellement. En déduire la transformée de Laplace de V.
b) Calculer la transformée de Laplace de U.
c) En déduire l'espérance de T.
d) Application : la loi commune des C_i est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.
e) Démontrer qu'en choisissant une constant R adéquate, la fonction $W(t) = e^{Rt}V(t)$ est solution d'une équation de renouvellement. Utiliser les théorème de renouvellement de la section suivante pour en déduire le comportement asymptotique de $V(t)$.

Solution. Pour montrer que V est solution d'une équation fonctionnelle, nous conditionnons à l'instant de première sollicitation

$$V^{T_1=x}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < x \ , \\ V(t-x)\ \mathrm{P}(C_1 < x) & \text{si } x \geq t \ . \end{cases}$$

Ainsi, V est solution de l'équation

$$\forall t \geq 0 \ , \quad V(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t V(t-x)F(x)\lambda e^{-\lambda x} dx \ .$$

La transformée de Laplace de V est donc solution de

$$\forall s > 0 \ , \quad LV(s) = \frac{1}{s+\lambda} + \lambda LV(s)LF(s+\lambda) \ .$$

Après résolution, nous obtenons

$$LV(s) = \frac{1}{(\lambda+s)(1-\lambda LF(s+\lambda))} \ .$$

Considérons le temps T correspondant au premier contrat perdu. Nous avons

$$\forall t \geq 0 \ , \quad \mathrm{P}(T > t) = V(t) \ .$$

Ainsi
$$E[T] = \int_0^\infty V(t)dt = LV(0)$$
soit
$$E[T] = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda LF(\lambda)} .$$

La fonction U n'est pas solution d'une équation de renouvellement. Toutefois en conditionnant comme précédemment, nous obtenons

$$U^{T_1=x}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < x , \\ V(t-x) & \text{si } x \geq t . \end{cases}$$

En intégrant, nous obtenons

$$\forall t \geq 0 , \quad U(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t V(t-x)\lambda e^{-\lambda x}dx .$$

Ainsi la transformée de Laplace de U est

$$\forall s > 0 , \quad LU(s) = \frac{1}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{s+\lambda}LV(s) .$$

Supposons que la société démarre sans contrat et considérons le temps T correspondant au premier contrat perdu. Nous avons

$$\forall t \geq 0 , \quad \mathrm{P}(T > t) = U(t) .$$

Ainsi
$$E[T] = \int_0^\infty U(t)dt = LU(0)$$
soit
$$E[T] = \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{1-\lambda LF(\lambda)}) .$$
Si la loi commune des C_i est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, alors

$$\forall s > 0 , \quad sLF(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$$

et
$$E[T] = \frac{2}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda^2} .$$

■

Exercice 29. Compteur d'impulsion. Un compteur d'impulsions peut s'avérer imparfait s'il ne peut enregistrer toutes les impulsions auxquelles il est soumis (une impulsion bloque en général le compteur pendant un temps aléatoire). On doit donc distinguer le processus des impulsions effectives du processus des impulsions enregistrées et obtenir des renseignements sur le premier à partir du second.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ le processus des durées séparant les impulsions effectives. On suppose qu'il s'agit d'un processus de renouvellement de loi F. On suppose de plus que la suite des durées pendant lesquelles le compteur reste bloqué forme un processus de renouvellement $(Y_i)_{i\geq 1}$ dont la loi a pour fonction de répartition G. Ce dernier processus est indépendant du processus des impulsions effectives. Nous souhaitons décrire le processus $(Z_i)_{i\geq 1}$ des temps d'attente entre les impulsions enregistrées. On suppose ensuite que $(X_i)_{i\geq 1}$ est une processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda > 0$.

Solution abrégée. Nous avons

$$Z_1 = Y_1 + \gamma_{Y_1} = T_{N_{Y_1}+1}$$

où T_n correspond à l'instant d'arrivée de la n^{e} arrivée effective. Nous avons donc

$$\forall z \geq 0\ , \quad \mathrm{P}(Z_1 \leq z) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y_1 + \gamma_{Y_1} \leq z \mid Y_1 = y) dG(y) = \int_0^z F_{\gamma_y}(z-y) dG(y)\ .$$

Si le processus d'arrivée est poissonnien, d'intensité λ, alors

$$\forall t \geq 0\ , \quad F_{\gamma_y}(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ .$$

Ainsi, nous trouvons

$$\forall z \geq 0\ , \quad \mathrm{P}(Z_1 \leq z) = \int_0^z G(z-y)\lambda e^{-\lambda y} dy\ .$$

On peut terminer le calcul de manière explicite lorsque G est connue en utilisant par exemple la transformée de Laplace. ∎

2.3.4 Le théorème de renouvellement

Le théorème de renouvellement précise le comportement asymptotique de la solution d'une équation de renouvellement

$$\forall t \geq 0\ , \quad A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dF(x)$$

lorsque la fonction a est bornée et intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Il convient de noter que l'équation vérifiée par la fonction de renouvellement M ne possède pas cette propriété.

Théorème 2.3.2 Théorème de renouvellement. *Soit a une fonction* **monotone** *sur $\mathbb{R}_+$, telle que*

$$\int_0^\infty |a(t)| dt < \infty\ .$$

Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Soit

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x)\ .$$

Alors la solution A de l'équation de renouvellement (Eq. 2.3.4, ci-dessus) est telle que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a(t)dt & si\ \mu < \infty\ , \\ 0 & si\ \mu = \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Nous admettons ce résultat. ■

Nous donnons ci-dessous quelques applications de ce théorème ayant pour objectif de déterminer les loi limites des temps courants d'un processus de renouvellement (temps résiduel, âge courant, temps total).

Exemple 2.3.1 *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F. On suppose que l'espérance $E[X_1] = \mu$ est finie. Son temps résiduel courant est*

$$\forall t \geq 0\ , \quad \gamma_t = T_{N_t+1} - t\,.$$

Fixons $y > 0$ et posons

$$\forall t \geq 0\ , \quad A_y(t) = \ P(\gamma_t > y)\,.$$

Nous souhaitons montrer que γ_t converge en loi lorsque t tend vers l'infini vers la loi

$$F_{\gamma_\infty}(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \ P(X_1 > t)dt.$$

Solution. En conditionnant à la première occurrence du processus, nous obtenons

$$\mathrm{P}(\gamma_t > y \mid X_1 = x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > t + y\,, \\ 0 & \text{si } t < x \leq t + y\,, \\ A_y(t-x) & \text{si } 0 < x \leq t. \end{cases}$$

après intégration, nous avons

$$\begin{aligned} A_y(t) &= \int_0^\infty \mathrm{P}(\gamma_t > y \mid X_1 = x)dF(x) \\ &= \int_0^t A_y(t-x)dF(x) + \int_{t+y}^\infty dF(x) \\ &= a_y(t) + \int_0^t A_y(t-x)dF(x) \end{aligned}$$

La fonction

$$\forall t \geq 0\ , \quad a_y(t) = 1 - F(t+y)$$

est monotone, positive. On peut aussi vérifier que cette fonction est intégrable

$$\int_0^\infty 1 - F(t+y)dt = \int_y^\infty \ \mathrm{P}(X_1 > t)dt \ < E[X_1] < \infty\ .$$

Les hypothèses du théorème de renouvellement sont satisfaites. L'application de ce théorème conduit au résultat suivant

$$\lim_{t\to\infty} A_y(t) = \lim_{t\to\infty} 1 - F_{\gamma_t}(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty a_y(t)dt$$

Une translation à l'origine permet de formuler l'équation précédente de la manière suivante

$$F_{\gamma_\infty}(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \; \mathrm{P}(X_1 > t)dt.$$

■

Commentaires. Pour illustrer ce résultat, considérons le processus de Poisson de paramètre λ. Nous avons

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}, \quad \forall y \geq 0.$$

Ainsi, le résultat précédent est égal à

$$F_{\gamma_\infty}(y) = \lambda \int_0^y e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda y}, \quad \forall y \geq 0.$$

Nous retrouvons ainsi un résultat connu (voir la section concernant le processus de Poisson)

Exercice 30. Déterminer la loi asymptotique du temps résiduel pour le processus de renouvellement de loi $\mathcal{U}(0,1)$.

Solution abrégée. Nous avons $E[X_1] = 1/2$ et pour tout $y \in [0,1]$,

$$F_{\gamma_\infty}(y) = 2\int_0^y (1-t)dt = 2y - y^2.$$

■

Proposition 2.3.3 Petit théorème de renouvellement. *On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F et on suppose que $E[X_1] = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$. Alors,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]} \; .$$

Intuition. Nous avons d'après l'identité de Wald

$$\frac{E[T_{N_t+1}]}{t} = E[X_1]\frac{1+M(t)}{t} \; .$$

De plus, d'après le résultat précédent,

$$E[T_{N_t+1}] = t + E[\gamma_t] \sim t + E[\gamma_\infty]$$

Puisque $E[\gamma_\infty] < \infty$, le résultat est immédiat. ■

Démonstration. Nous donnons une démonstration directe de ce résultat. Technique, elle peut être omise en première lecture. Pour démontrer l'égalité précédente, nous procèdons en deux étapes.

Etape 1. La relation

$$T_{N_t+1} > t$$

est toujours vérifiée. D'après la proposition 2.3.2, nous avons

$$\forall t \geq 0 \ , \quad E[X_1](1 + M(t)) > t \ .$$

Ceci implique

$$\forall t \geq 0 \ , \quad \frac{M(t)}{t} > \frac{1}{E[X_1]} - \frac{1}{t}$$

et

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{E[X_1]} \ .$$

Etape 2. Il s'agit de démontrer que l'on peut "inverser" l'inégalité précédente. Pour ce faire, choisissons un réel $\alpha > 0$ et posons

$$\forall i \geq 1 \ , \quad X_i^\alpha = \min(\alpha, X_i) \ .$$

Considérons maintenant le processus de renouvellement associé ła fonction de répartition des X_i^α. Nous notons M^α la fonction de renouvellement correspondante. Puisque

$$X_i^\alpha \leq \alpha,$$

nous avons

$$M(t) \leq M^\alpha(t)$$

et

$$E[T^\alpha_{N_t^\alpha+1}] \leq t + \alpha \ .$$

Ceci implique que

$$E[X_1^\alpha](1 + M(t)) \leq t + \alpha$$

et

$$\frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{E[X_1^\alpha]} + \frac{1}{t}(\frac{\alpha}{E[X_1^\alpha]} - 1) \ .$$

Finalement, puisque α peut être arbitrairement grand

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{E[X_1^\alpha]} = \frac{1}{E[X_1]} \ .$$

Les inégalités obtenues aux étapes 1 et 2 montrent que la limite existe et que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}.$$

■

Commentaires. Ce résultat traduit un comportement asymptotique poissonnien des processus de renouvellement. Lorsque t est grand, le nombre moyen d'occurrences par unité de temps est constant et égal, comme pour le processus de Poisson, à l'inverse de l'espérance des durées inter-occurrences.

Nous terminons ce paragraphe en présentant quelques exercices supplémentaires en application des résultats de la théorie du renouvellement.

Exercice 31. Loi limite de l'âge courant. On considère un processus de renouvellement de fonction de répartition F. On suppose que l'espérance $E[X_1]$ est finie. L'âge courant est

$$\forall t \geq 0\ , \quad \delta_t = t - T_{N_t}\ .$$

a) Montrer l'identité des événements

$$\forall x, y \geq 0\ , \quad (\gamma_t > x; \delta_t > y) = (\gamma_{t-y} > x + y)$$

b) En déduire que la loi limite de l'âge courant est identique à la loi limite du temps résiduel.

Exercice 32. Loi limite du temps courant. On note β_t le temps courant d'un processus de renouvellement de fonction de répartition F, de moyenne $\mu > 0$ et on pose

$$\forall t \geq 0\ , \quad K_z(t) = \mathrm{P}(\beta_t > z)\ .$$

a) Montrer que K_z est solution d'une équation de renouvellement.
b) En déduire

$$\lim_{t\to\infty} K_z(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty 1 - F(\max\{z,t\})\ dt = \frac{1}{\mu}\int_z^\infty x dF(x).$$

c) Retrouver le fait que β_∞ a même loi que $X_1 + X_2$ dans le processus de Poisson.
d) A l'aide de l'inégalité de Schwarz, démontrer

$$E[\lim_{t\to\infty} \beta_t] \geq \mu.$$

Exercice 33. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus de renouvellement de fonction de répartition F. On suppose, de plus, $E[X_1] = \mu$ et $\sigma^2[X_1] = \sigma^2$ finies. On note γ_t le temps résiduel au temps t associé à ce processus et $U(t) = E[\gamma_t]$.

a) Impliquer $U(t)$ dans une équation de renouvellement.
b) Montrer que

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} \,.$$

Exercice 34. Pour un processus de renouvellement $\{N_t \;;\; t \geq 0\}$ de fonction de renouvellement M, démontrer, à l'aide d'une équation de renouvellement, que

$$E[N_t^2] = 2\int_0^t [M(t-x) + \frac{1}{2}]dM(x).$$

Exercice 35. Soit $\{N_t \;;\; t \geq 0\}$ un processus de renouvellement de loi F, tel que

$$\mu = \int_0^\infty x dF(x) < \infty \,.$$

Démontrer la loi forte des grands nombres

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

Attention ce résultat n'implique pas le petit théorème de renouvellement !

Solution abrégée. Utiliser que

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

■

Exercice 36. Soit U un nombre pris au hasard dans $(0, 1)$. On définit $Y_t = c$ si $U > 1/t$ et $Y_t = c + t$ sinon. Montrer que $Y_t \to c$ ps et que $E[Y_t] \to c + 1$.

Exercice 37. Vie Communautaire. Mickey Markov vit dans un F3 avec 5 autres collocs, et personne n'aime se prêter aux tâches ménagères. Mickey et ses collocataires se nourrissent exclusivement de pizzas, et le ménage se résume à descendre la poubelle lorqu'elle contient n boîtes de pizza vides. Il n'y a pas d'heure pour les pizzas, et on suppose que chaque colloc porte une boîte vide dans la poubelle selon un taux propre égal à λ_i $(i = 1, \ldots, 6)$. C'est celui qui trouve la poubelle pleine qui doit la descendre. Déterminer la loi du temps écoulé avant que Mickey descende la poubelle pour la première fois. Calculer son espérance et sa variance. Calculer l'espérance conditionnelle de ce temps sachant que Mickey n'a toujours pas descendu de poubelle au temps t. Etudier le processus des instants de descente de poubelle de Mickey.

Exercice 38. Santé publique. La république centrale du Brouzoukstan vient de connaître une terrible épidémie de SRAGG (Syndrôme Rétro Actif GuiliGuili) pendant l'été. Pour faire face et secourir la population désemparée, le ministre de la Santé rentre des Bahamas et prend une mesure d'urgence. Un numéro de téléphone gratuit est ouvert, et un expert compétent répond aux questions. Mickey Markov a décroché l'emploi. Mickey dispose d'une (seule) ligne. Il peut seulement recevoir des appels. Un appel est perdu s'il survient pendant qu'une conversation est en cours. On note

- T_i l'instant du i^{e} appel ;
- C_i la durée de la i^{e} conversation ;
- $U(t)$ la probabilité qu'aucun appel ne soit perdu entre 0 et t, sachant que la ligne est libre à l'instant 0.

On suppose que les appels (T_n) se succèdent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que les (C_n) forment un processus de renouvellement de loi F. On note T l'instant du premier appel perdu. Calculer la transformée de Laplace de la fonction de répartition F_T et en déduire l'espérance du temps d'attente du premier appel perdu quand la ligne est libre à l'instant 0. Application : la loi commune des C_i est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

2.4 Applications

2.4.1 Sommes aléatoires indexées par un processus de renouvellement

Dans de nombreuses situations pratiques, un coût est associé à chaque occurrence d'un processus de renouvellement. Par exemple, la valeur d'une automobile décroît après chaque choc sur la carrosserie. Dans ce cas, le processus de renouvellement correspond au processus des chocs. Pour une compagnie d'assurance, un montant est associé à chaque occurrence de sinistre dont est victime un client. Le coût en question peut aussi représenter la somme dépensée par un client dans un service. Dans ce dernier cas, il est positif. Formellement, nous considérons un processus de renouvellement $(X_n)_{n\geq 1}$ de fonction de répartition F et $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ son processus de comptage. Une variable aléatoire Y_n est associée à la n^{e} occurrence de ce processus (elle peut être positive ou négative et elle dépend éventuellement de X_n). On suppose que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi. Le *coût total* au temps $t > 0$ est une variable aléatoire notée $C(t)$ définie par

$$C(t) = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n \ .$$

Pour des raisons évidentes de prévision, il est très important de pouvoir contrôler le coût total. La prévision permet par exemple de déterminer la date optimale pour renouveller un matériel (l'automobile de l'exemple précédemment cité), de fixer le taux de cotisation pour l'assurance, de gérer des stocks pour un centre commercial etc.

En général, il est extrêmement difficile de déterminer avec exactitude la loi de la variable $C(t)$. Nous nous contenterons ici d'étudier le comportement asymptotique de cette variable. Cela constitue un bel exemple d'utilisation des processus de renouvellement.

Proposition 2.4.1 *On considère un processus de renouvellement (X_n) de fonction de répartition F et une suite (Y_n) de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose de plus que*

$$E[X_1] < \infty \text{ et } E[|Y_1|] < \infty .$$

Alors le coût asymptotique moyen est égal à

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[Y_1]}{E[X_1]} .$$

Intuition. Nous avons

$$\frac{E[C(t)]}{t} = E[\frac{Y_1 + \cdots + Y_{N_t}}{N_t} \frac{N_t}{t}].$$

Puisque N_t tend vers l'infini, nous pouvons appliquer la loi forte des grands nombres

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_{N_t}}{N_t} \to E[Y_1] \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, nous avons

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \lim_{t\to\infty} E[\frac{E[Y_1]\, N_t}{t}] = \frac{E[Y_1]}{E[X_1]},$$

d'après le petit théorème de renouvellement. ∎

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes pour une preuve directe.

1e étape. Tout d'abord, montrons que la fonction définie par

$$\forall t \geq 0 , \quad A(t) = E[Y_{N_t+1}]$$

est solution d'une équation de renouvellement. En conditionnant à la première occurrence du processus de renouvellement, nous obtenons

$$\forall x > t , \quad E[Y_{N_t+1} \mid X_1 = x] = E[Y_1 \mid X_1 = x]$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \leq t , \quad E[Y_{N_t+1} \mid X_1 = x] &= E[Y_{N_t - N_x + N_x + 1} \mid X_1 = x] \\ &= E[Y_{N_{t-x}+1}] \end{aligned}$$

Après intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0\,, \quad A(t) &= \int_0^\infty E[Y_{N_t+1} \mid X_1 = x]dF(x) \\ &= a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x)\end{aligned}$$

où

$$\forall t \geq 0\,, \quad a(t) = \int_t^\infty E[Y_1 \mid X_1 = x]dF(x)\ .$$

Il est immédiat de vérifier que la fonction a est bornée. En effet,

$$\forall t \geq 0\,, \quad |a(t)| \leq E[|Y_1|] < \infty\ .$$

D'après le théorème de renouvellement, nous avons donc

$$\forall t \geq 0\,, \quad A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x)$$

où M est la fonction de renouvellement.

2e étape. Il est clair que $a(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t > t_0\,, \quad |a(t)| < \epsilon\ .$$

Ceci entraîne, pour tout $t > t_0$, que

$$\begin{aligned}\int_0^t |a(t-x)|dM(x) &\leq \int_0^{t-t_0} |a(t-x)|dM(x) + \int_{t-t_0}^t |a(t-x)|dM(x) \\ &= \epsilon M(t-t_0) + E[|Y_1|](M(t) - M(t-t_0))\end{aligned}$$

et

$$\frac{\int_0^t |a(t-x)|dM(x)}{t} \leq \epsilon\frac{M(t-t_0)}{t} + E[|Y_1|]\frac{(M(t) - M(t-t_0))}{t}\ .$$

D'après le petit théorème de renouvellement (proposition 2.3.3), nous avons

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t-t_0)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]}$$

et par suite, puisque ϵ est arbitraire,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = 0.$$

3e étape. Voici comment l'on conclut à partir du résultat précédent. Nous avons

$$E[C(t)] = E[\sum_{n=1}^{N_t+1} Y_n - Y_{N_t+1}] = E[Y_1]E[N_t+1] - E[Y_{N_t+1}]\ .$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[Y_1]}{E[X_1]} \ .$$

■

Commentaires. A la fin de la démonstration précédente, nous avons utilisé la relation suivante

$$E[\sum_{n=1}^{N_t+1} Y_n] = E[Y_1]E[N_t+1] \ .$$

Elle repose sur la généralisation de la formule de Wald classique pour les temps d'arrêt.

2.4.2 Remplacement préventif

Ce paragraphe concerne une stratégie de remplacement préventif d'un matériel susceptible de tomber en panne. La durée de vie d'un matériel est une variable aléatoire X de fonction de répartition F. Une politique de remplacement préventif consiste à renouveller systématiquement le matériel dès qu'il tombe en panne ou qu'il a dépassé une durée de bon fonctionnement égale à $a > 0$. Nous cherchons en premier lieu à determiner la loi de probabilité conditionnelle de la variable X sachant que $X < a$. Elle est définie par la fonction de répartition suivante

$$\forall t \geq 0 \ , \quad G_a(t) = \ \mathrm{P}(X \leq t | X < a) = \begin{cases} \frac{F(t)}{F(a)} & \text{si } t \leq a \ , \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si X_a est une variable de fonction de répartition G_a, alors son espérance est égale à

$$E[X_a] = \frac{\int_0^a x dF(x)}{F(a)} \ .$$

On s'intéresse à la variable aléatoire T correspondant à l'instant du premier remplacement effectivement préventif. Remarquons que T peut s'écrire de la manière suivante (par convention $\sum_1^0 = 0$)

$$T = a + \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

où les variables Y_i sont indépendantes et ont même loi que que la variable X_a. En ce qui concerne N, nous avons

$$\forall k \geq 0 \ , \quad \mathrm{P}(N = k) = F(a)^k(1 - F(a)) \ .$$

La variable N est donc une variable de loi géométrique décalée vers 0. Nous obtenons alors

$$E[T] = a + E[N]E[X_a] = a + \frac{\int_0^a x dF(x)}{1 - F(a)} \ .$$

On note H la fonction de répartition de la variable aléatoire $T-a$. Montrons que l'on peut écrire, pour tout $t > 0$,

$$H(t) = 1 - F(a) + F(a) \int_0^t H(t-x) dG_a(x)$$

où G_a est la fonction de répartition de la variable X_a. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0 \quad H(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\sum_{n=1}^{k} Y_n < t)\ \mathrm{P}(N=k) \\
&= 1 - F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\sum_{n=1}^{k} Y_n < t) F(a)^k (1-F(a)) \\
&= (1-F(a)) \left(1 + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\sum_{n=1}^{k-1} Y_n < t-x) F(a)^{k-1} dG_a(x) \right) \\
&= 1 - F(a) + F(a) \int_0^t H(t-x) dG_a(x)\ .
\end{aligned}$$

où G_a est la fonction de répartition de G_a. La transformée de Laplace de la variable aléatoire T se déduit du calcul précédent. En effet,

$$\forall s > 0\ , \quad L_T(s) = sLH(s)e^{-sa} = \frac{1-F(a)}{1-F(a)LX_a(s)} e^{-sa}\ .$$

Les différents moments de T peuvent être calculés à partir de cette expression. ■

Remarque. Le calcul de la transformée de Laplace de la variable T peut s'effectuer directement à partir de la représentation précédente

$$T = a + \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

Un processus de coût est associé à la politique de remplacement préventif de la manière suivante.

- Lorsque l'on peut renouveler le matériel avant qu'il ne soit hors d'usage, le coût est $Z_1 = C_1 > 0$.
- Lorsque le matériel tombe en panne avant le remplacement préventif, le coût est $Z_1 = C_1 + C_2$ où $C_2 > 0$.

Soit $C(t)$ le coût total au temps t associé à la politique de remplacement préventif. Nous avons

$$\forall t \geq 0\, , \quad C(t) = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

où $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ est le processus de renouvellement associé à la fonction de répartition

$$\forall t \geq 0\, , \quad V(t) = \begin{cases} F(t) & \text{si } t \leq a \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'espérance de cette loi est

$$E = \int_0^a x dF(x) + a(1 - F(a)) \; .$$

L'espérance de Z_1 est

$$E[Z_1] = C_1 \mathrm{P}(X > a) + (C_1 + C_2)\mathrm{P}(X \leq a) \; .$$

Finalement, le coût moyen asymptotique associé à la politique de remplacement préventif est

$$\frac{C_1 + F(a)C_2}{\int_0^a x dF(x) + a(1 - F(a))} .$$

Commentaires. Il est très facile d'utiliser cette formule pour "optimiser" le remplacement préventif. On choisira a de sorte à minimiser le coût moyen asymptotique. En général, cela se fait numériquement.

Exercice 39. Mickey Markov ne roule qu'en 2CV. Il voudrait calculer la meilleure date pour revendre sa 2CV du moment, dont la durée de vie est une variable de loi uniforme sur $(0, 20)$ ans. Comme c'est une voiture de collection, il peut la vendre 1500 euros en état de fonctionnement, en seulement 500 euros si elle est en panne. Pouvez-vous l'aider ?

2.4.3 Renouvellement alterné

A un instant donné considéré comme instant initial, un système est mis en fonctionnement. Ce système est susceptible d'être en dérangement ou bien de tomber en panne. A la suite d'une panne ou d'un dérangement, le système est remis en marche après une période de maintenance d'une durée aléatoire. On suppose que les durées de bon fonctionnement $(X_n)_{n \geq 1}$ constituent une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de fonction de répartition F continue, tandis que les durées de réparation $(Y_n)_{n \geq 1}$ indépendantes entre elles et de la suite (X_n), de même loi de fonction de répartition G continue.

Nous nous intéressons à la *disponibilité* du système au temps $t > 0$. Cette grandeur, notée $A(t)$ est égale à la probabilité que le système soit en fonctionnement à l'instant t.

Proposition 2.4.2 *Les instants successifs $(Z_n)_{n \geq 1}$ de remise en fonctionnement du système forment un processus de renouvellement de fonction de répartition*

$$\forall t \geq 0 \; , \quad H(t) = \int_0^t G(t - x) dF(x) \; .$$

Démonstration. Nous avons

$$\forall n \geq 1 \; , \quad Z_n = X_n + Y_n \; .$$

Ainsi

$$\forall t \geq 0 \; , \quad H(t) = \int_0^t G(t-x) dF(x) \; .$$

■

La théorie du renouvellement permet de déterminer le comportement asymptotique de la disponibilité du système.

Proposition 2.4.3 *Supposons que $E[X_1] < \infty$. Alors, nous avons*

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \frac{E[X_1]}{E[X_1 + Y_1]}$$

Démonstration. La démonstration repose sur le fait que la fonction $A(t)$ est solution de l'équation de renouvellement suivante

$$A(t) = [1 - F(t)] + \int_0^t A(t-z) dH(z) \; .$$

En effet, en conditionnant à $Z_1 = z$, nous obtenons

$$\forall t \geq 0 \; , \quad A^{Z_1 = z}(t) = \begin{cases} A(t-z) & \text{si } z \leq t \\ \mathrm{P}(X_1 > t \,|\, Z_1 = z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$A(t) = \int_0^t A(t-z) dH(z) + \int_t^\infty \mathrm{P}(X_1 > t \,|\, Z_1 = z) dH(z) \; .$$

Mais, on a évidemment

$$\mathrm{P}(X_1 > t \,|\, Z_1 = z) = 0$$

si $z \leq t$ et donc

$$\int_t^\infty \mathrm{P}(X_1 > t \,|\, Z_1 = z) dH(z) = 1 - F(t) \; .$$

En notant que $1 - F$ est bornée et intégrable, d'intégrale égale à $E[X_1]$, nous avons d'après le théorème de renouvellement

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \frac{E[X_1]}{E[X_1 + Y_1]} \; .$$

■

Dans le cas ou le système vérifie l'hypothèse d'absence d'usure, la fonction de disponibilité peut être parfois calculée explicitement. Nous supposons par exemple que les durées de fonctionnement suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que les durées de réparation suivent la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. La transformée de Laplace de A est alors égale à

$$\forall s > 0 \ , \quad LA(s) = \frac{\mu + s}{s^2 + s(\mu + \lambda)} \ .$$

L'expression de $A(t)$ se déduit par inversion de la transformée de Laplace.

$$\forall t \geq 0 \ , \quad A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \ .$$

Commentaires. Ce cas particulier peut être modélisé à l'aide d'un processus de Markov binaire. Ce formalisme sera présenté dans un chapitre ultérieur. Nous laisserons alors au lecteur le soin de retrouver les résultats précédents en utilisant un processus de Markov à deux états. On pourra poursuivre par l'exercice donné ci-dessous.

Exercice 40. Les fonctions de répartition F et G sont à nouveau celles de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On considère la grandeur $V(t)$ égale à la durée totale de fonctionnement à l'instant t

$$\forall t \geq 0 \ , \quad V(t) = \int_0^t 1\!\!1_{\{\text{le systeme fonctionne a l'instant } s\}} ds \ .$$

Pour exécuter une tâche précise, on doit solliciter le système pendant une durée de globale de fonctionnement c fixée. On s'intéresse au temps effectif nécessaire pour accomplir cette tâche (réparations comprises) soit

$$T(c) = \inf\{t > 0 : V(t) = c\}.$$

a) Montrer que l'on peut écrire $T(c) = c + \sum_{n=1}^{N_c} Y_n$. En déduire la fonction caractéristique la variable $T(c)$.
b) Montrer que $E[T(c)] = c(\frac{\mu+\lambda}{\mu})$.
c) Montrer que $Var(T(c)) = 2c\frac{\lambda}{\mu^2}$.
d) Montrer que la variable aléatoire

$$\frac{\mu T(c) - c(\mu + c)}{\sqrt{2c\lambda}}$$

converge en loi vers une variable gaussienne centrée réduite lorsque c tend vers l'infini.
e) En déduire une valeur approchée, lorsque c est grand, du temps au bout duquel avec une probabilité 0.95 la tâche sera terminée.

Chapitre 3

Analyse du risque

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle classique de risque pour une compagnie d'assurance. Dans le domaine de l'actuariat, on qualifie de *risque* la probabilité de banqueroute de la compagnie, c'est-à-dire la probabilité pour que son capital devienne nul un jour, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisations des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

3.1 Présentation du modèle

Dans le modèle le plus simple, une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial positif u, chiffré dans une unité quelconque. Au cours du temps, le capital de cette compagnie peut évoluer en fonction des cotisations des assurés, de la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés et des montants à rembourser que ces sinistres occasionnent.

On convient de noter $u + X_t$ le capital au temps t. On suppose que

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson $\{N_t \; ; \; t \geq 0\}$ de paramètre $\alpha > 0$;
- le sinistre k occasionne pour la compagnie une perte aléatoire $Z_k > 0$;
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps à un taux constant $c > 0$.

Nous interprétons les paramètres de ce modèle en remarquant que α représente l'*intensité* des sinistres et c est appelé le *taux de cotisation*. Dans la pratique, les cotisations sont rarement capitalisées continûment au cours du temps, mais en général à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et nous supposons donc que les prélévements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement $N_t = 0$, la valeur du capital de la compagnie au temps t est donc égal à $u + ct$.

On suppose, de plus, que les variables aléatoires $(Z_k)_{k \geq 1}$ correspondant au montants des remboursement forment un processus de renouvellement de loi F, et telle que

$$E[Z_k] = \mu$$

et
$$Var(Z_k) = \sigma^2.$$

Définition 3.1.1 *Nous appelons processus de risque, le processus défini par*
$$\forall t \geq 0, \quad X_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$
avec la convention habituelle $\sum_1^0 = 0$.

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la société au temps t est égal à $u + X_t$. De plus, le risque moyen pour un intervalle $(0,t]$ est égal à
$$E[X_t] = ct - E[N_t]\mu = (c - \alpha\mu)t.$$
Nous notons
$$\rho = \frac{c - \alpha\mu}{\alpha\mu} = \frac{c}{\alpha\mu} - 1$$
que nous appelons le *coefficient relatif de sécurité*. On suppose par la suite que $\rho > 0$, cela garantit que le processus de risque dérive presque-sûrement vers $+\infty$. D'après la loi forte des grands nombres,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = c - \alpha\mu \quad \text{p.s..}$$
En effet, nous avons
$$\forall t \geq 0, \quad \frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t}.$$
D'après la loi forte des grands nombres, nous avons
$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \to \frac{1}{\alpha} \quad \text{p.s.}$$
et
$$\frac{N_t}{t} \to \alpha \quad \text{p.s.}$$
Ceci entraine
$$\frac{X_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i}{N_t}\frac{N_t}{t} \to c - \mu\alpha \quad \text{p.s.}$$
Puisque $\rho > 0$, (X_t) devient négatif (i.e., passe sous l'axe $0t$) un nombre fini de fois.

Définition 3.1.2 *Nous appelons probabilité de ruine, la fonction définie par*
$$\forall u \geq 0, \quad \psi(u) = \ P(\exists\ t > 0\ t.q.\ u + X_t \leq 0)$$

Il sera parfois plus commode d'utiliser la probabilité de non-ruine
$$\forall u \geq 0, \quad \phi(u) = 1 - \psi(u)$$

3.2 L'argument de renouvellement

Nous montrons que la probabilité de non-ruine est solution d'une équation intégro-differentielle ;

Proposition 3.2.1 *Soit f_{Z_1} la densité de probabilité de la variable Z_1. Nous avons*

$$\phi'(u) = \frac{\alpha}{c}\phi(u) - \frac{\alpha}{c}\phi * f_{Z_1}(u).$$

Démonstration. De manière habituelle, la première étape permettant de calcul $\psi(u)$ est de conditionner au premier sinistre, et de remarquer que le capital de l'assurance se comporte de manière identique à $u + X_t$ mais à partir de la valeur initiale $u + cT_1 - Z_1$. Nous avons donc

$$\phi(u) = \mathrm{P}(\text{ non ruine }) = E[\mathrm{P}(\text{ non ruine } \mid T_1; Z_1)]$$

et

$$\phi(u) = E[\phi(u + cT_1 - Z_1)]$$

En utilisant la densité conjointe du couple (T_1, Z_1)

$$\forall x > 0, z > 0\,, \quad f_{(T_1,Z_1)}(x,z) = \alpha e^{-\alpha x} f_{Z_1}(z),$$

nous obtenons

$$\phi(u) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} \int_0^{u+cx} \phi(u + cx - z) dF(z) dx.$$

Le changement de variable affine $x \leftarrow u + cx$, nous permet de simplifier cette équation. Nous obtenons en définitive le résultat suivant

$$\phi(u) = \frac{\alpha}{c} e^{\alpha u/c} \int_u^\infty e^{-\alpha x/c} \int_0^x \phi(x - z) dF(z) dx.$$

Nous vérifions que ϕ est une fonction differentiable, et la différenciation conduit au résultat énoncé. ■

L'intégration de l'équation intégro-différentielle conduit à une autre relation plus simple.

Proposition 3.2.2 *Nous avons*

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\alpha}{c} \int_0^u \phi(u - z)(1 - F(z)) dz.$$

Démonstration. On utilise la transformée de Laplace. L'équation différentielle

$$\phi'(u) = \frac{\alpha}{c}\phi(u) - \frac{\alpha}{c}\phi * f_{Z_1}(u),$$

devient

$$sL\phi(s) = \phi(0) + \frac{\alpha}{c}\left(L\phi(s)(1 - sLF(s))\right).$$

En divisant par s, nous obtenons

$$L\phi(s) = \frac{\phi(0)}{s} + \frac{\alpha}{c}\left(L\phi(s)(\frac{1}{s} - LF(s))\right).$$

Puisque

$$(\frac{1}{s} - LF(s)) = L(1-F)(s),$$

nous avons

$$L\phi = L(\phi(0) + \frac{\alpha}{c}\phi * (1-F)),$$

et le résultat découle de l'injectivité de la transformée de Laplace. ∎

D'après le théorème de convergence monotone, nous obtenons lorsque $u \to \infty$ que

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \frac{\alpha\mu}{c}\phi(\infty).$$

Puisque $\phi(\infty) = 1$, nous avons

$$\psi(0) = \frac{\alpha\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho}, \quad \text{si } \alpha\mu > c.$$

Finalement, $\psi(0)$ ne dépend de la distribution des montants occasionnés par les sinistres qu'à travers sa moyenne μ. Plus précisement $\alpha\mu$ est le montant moyen remboursé par unité de temps. Ce résultat est montre que l'analyse est robuste si l'on modifie la loi F sans changer sa moyenne.

3.3 Remboursements de loi exponentielle

Un cas particulier intéressant est celui des montants de remboursement des sinistres selon la loi exponentielle

$$F(x) = 1 - \exp(-x/\mu), \quad x > 0.$$

C'est l'un des rares cas que l'on pourra résoudre complètement.

Proposition 3.3.1 *Lorsque F est la loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, nous avons*

$$\forall u \geq 0, \quad \psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}$$

Démonstration. Nous avons

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u \phi(u-z)e^{-z/\mu}dz.$$

À nouveau, le résultat s'obtient en prenant la transformée de Laplace des deux termes à identifier. ∎

3.4 L'approximation de Cramer-Lundberg

L'approximation de Cramer-Lundberg décrit le comportement asymptotique de la probabilité de ruine lorsque le capital initial u tend vers l'infini. Ce comportement sera typiquement exponentiellement décroissant comme dans le paragraphe précédent. Pour décrire ce comportement asymptotique, nous utiliserons les résultats de la théorie du renouvellement.

Une première remarque est que $\psi(u)$ est solution de l'équation

$$\psi(u) = a(u) + \frac{\alpha}{c}\int_0^u \psi(u-z)(1-F(z))dz$$

où

$$a(u) = \frac{\alpha}{c}\int_u^\infty (1-F(z))dz.$$

Cette équation n'est sans doute pas une équation de renouvellement car

$$\frac{\alpha}{c}\int_0^\infty (1-F(z))dz = \frac{1}{1+\rho} < 1.$$

mais l'idée de la transformer en une telle équation par une normalisation adéquate est tentante. Supposons qu'il existe une constante R telle que

$$\frac{\alpha}{c}\int_0^\infty e^{Rz}(1-F(z))dz = 1.$$

Une telle constante s'appelle l'*exposant de Lundberg*. Une intégration montre que l'exposant de Lundberg est solution de l'équation

$$\frac{cr}{\alpha} = h(r) \equiv \int_0^\infty e^{rz}dF(z) - 1. \tag{3.4.1}$$

Nous supposons que $b(u) = e^{Ru}a(u)$ est une fonction bornée, monotone et intégrable.

Proposition 3.4.1 *(Approximation de Cramer-Lundberg) Soit R une solution positive de l'équation 3.4.1. Nous avons*

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{\rho\mu}{h'(R)-c/\alpha}.$$

Démonstration. Nous vérifions désormais que

$$g(z) = \frac{\alpha}{c}e^{Rz}(1-F(z))$$

est bien la densité d'une loi de probabilité. En multipliant par e^{Ru}, nous obtenons

$$e^{Ru}\psi(u) = e^{Ru}a(u) + \int_0^u e^{R(u-z)}\psi(u-z)g(z)dz.$$

Cette dernière équation est une équation de renouvellement, le théorème de renouvellement permet de conclure que

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{C_1}{C_2}$$

où

$$C_1 = \frac{\alpha}{c}\int_0^\infty e^{Ru}\int_u^\infty (1-F(z))dzdu$$

et

$$C_2 = \int_0^\infty zg(z)dz.$$

Concernant le calcul de C_1, en utilisant Fubini pour inverser l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$C_1 = \int_0^\infty \int_0^z e^{Ru}du\frac{\alpha}{c}(1-F(z))dz = \frac{1}{R}(1-\mu\alpha/c).$$

Finalement, cela se simplifie en

$$C_1 = \frac{1}{R}\frac{\rho}{1+\rho}.$$

En intégrant par parties, et en utilisant que $h'(R)$ s'exprime de la manière suivante

$$h'(R) = \int_0^\infty ze^{Rz}dF(z),$$

et que la primitive de ze^{Rz} est $(z/R - 1/R^2)e^{Rz}$, nous obtenons

$$C_2 = \frac{1}{1+\rho}\frac{1}{R\mu}(h'(R) - c/\alpha).$$

∎

Revenons maintenant sur l'exemple de la section précédente : le cas où F est la loi exponentielle de moyenne μ. Dans ce cas, nous avons

$$h(r) = \frac{\mu r}{1-\mu r}$$

et l'exposant de Lundberg se calcule à l'aide la formule

$$\frac{\mu R}{1-\mu R} = \frac{cR}{\alpha}.$$

Cela donne

$$R = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)}.$$

De plus, nous avons

$$h'(R) = \mu(1+\rho)^2$$

et nous retrouvons bien que

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}.$$

3.5 Majoration de la probabilité de ruine

Nous considérons dans cette section une approche différente pour majorer la probabilité de ruine. Cette approche est fondée sur l'introduction d'une *martingale exponentielle* et elle constitue une démarche courante pour les questions d'atteinte.

Comme nous le verrons plus loin, une *martingale* (M_t) est un processus aléatoire sans tendance, c'est-à-dire que l'espérance conditionnelle de la variable M_t sachant le passé du processus jusqu'au temps $s \leq t$ est tout simplement M_s

$$E[M_t \mid M_{s'}\ ,\ 0 \leq s' \leq s] = M_s$$

avec l'abus officiel de notation utilisé pour le conditionnement (voir le paragraphe sur les martingales dans le chapitre sur le mouvement brownien). Nous supposons de plus que les variables M_t sont intégrables.

Un *temps d'arrêt* pour un processus est un temps aléatoire τ tel que l'événement $(\tau \leq t)$ ne dépend que du passé du processus au temps t, pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, $\tau_t = \inf(t, \tau)$ est aussi un temps d'arrêt, cette fois nécessairemement borné. Dans une version simplifiée, le *théorème d'arrêt* s'énonce de la manière suivante. Ce resultat est très utile pour estimer des probabilités de ruine.

Proposition 3.5.1 *Soit τ un temps d'arrêt borné, i.e, $\tau < t_0 < \infty$. Alors*

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

D'une manière similaire à celle utilisée lors de l'étude des temps d'atteinte de marche brownienne, nous introduisons le processus aléatoire

$$M_t = \frac{e^{-r(u+X_t)}}{L_{X_t}(r)}.$$

Notons que

$$L_{X_t}(r) = E[e^{-rX_t}] = e^{-crt}E[e^{r\sum_{k=1}^{N_t} Z_k}].$$

En conditionnant selon les valeurs de N_t, nous obtenons

$$E[e^{r\sum_{k=1}^{N_t} Z_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(N_t = k)E[e^{rZ_1}]^k = e^{\alpha t(E[e^{rZ_1}]-1)}.$$

Finalement, nous avons

$$L_{X_t}(r) = e^{t(\alpha h(r) - rc)} \equiv e^{tg(r)}.$$

Notons $\tau(u)$ le temps de ruine (atteinte de 0). Il s'agit d'un temps d'arrêt non borné, et nous avons

$$\psi(u) = \mathrm{P}(\tau(u) < \infty).$$

Proposition 3.5.2 *Le processus (M_t) est une martingale, aussi appelée martingale de Wald.*

Démonstration. Nous utilisons l'indépendance des accroissements de (X_t). Cette propriété provient du fait que les (Z_k) sont indépendantes et que le processus (N_t) est à lui-même accroissements indépendants. Soit $s < t$, les variables X_s et $X_t - X_s$ sont donc indépendantes. D'où

$$E[e^{-r(u+X_t)} \mid M_{s'},\, s' \leq s] = E[e^{-r(u+X_s)} e^{-r(X_t - X_s)} \mid M_{s'},\, s' \leq s] = M_s L_{X_s}(r)\, E[e^{-r(X_t - X_s)}].$$

Nous avons donc

$$E[e^{-r(u+X_t)} \mid M_{s'},\, s' \leq s] = M_s L_{X_s}(r) L_{X_t - X_s}(r).$$

Puisque $L_{X_s}(r) L_{X_t - X_s}(r) = L_{X_t}(r)$, nous obtenons le résultat anoncé. ■

Proposition 3.5.3 *(Inégalité de Lundberg) Nous avons*

$$\forall u \geq 0, \quad \psi(u) \leq e^{-Ru}$$

où R est l'exposant de Lundberg.

Démonstration. Soit $t_0 < \infty$. Considérons $\tau = \tau(u)$ (u est fixé pour la démonstration) et $\tau_0 = \tau_{t_0}$. D'après la proposition 3.5.1, nous avons

$$E[M_{\tau_0}] = M_0 = e^{-ru}.$$

En conditionnant, nous avons

$$E[M_{\tau_0}] = E[M_{\tau_0} \mid \tau \leq t_0]\, \mathrm{P}(\tau \leq t_0) + E[M_{\tau_0} \mid \tau > t_0]\, \mathrm{P}(\tau > t_0),$$

et

$$E[M_{\tau_0}] \geq E[M_{\tau_0} \mid \tau \leq t_0]\, \mathrm{P}(\tau \leq t_0) = E[M_\tau \mid \tau \leq t_0]\, \mathrm{P}(\tau \leq t_0).$$

Par ailleurs, nous avons $u + X_\tau \leq 0$ si $(\tau \leq t_0)$ est réalisé. Ceci entraîne, en utilisant l'inégalité de Jensen (pour la fonction $1/x$),

$$E[M_\tau \mid \tau \leq t_0] \geq \frac{1}{E[L_{X_\tau}(r) \mid \tau \leq t_0]} \geq E[e^{-\tau g(r)} \mid \tau \leq t_0].$$

En réunissant les deux inégalités, nous avons

$$\mathrm{P}(\tau \leq t_0) \leq \frac{e^{-ru}}{E[e^{-\tau g(r)} \mid \tau \leq t_0]}.$$

En prenant le sup sur l'intervalle $(0, t_0]$ dans l'espérance, puis en faisant $t_0 \to \infty$, nous avons

$$\psi(u) \leq e^{-ru} \sup_{t \geq 0} e^{t(\alpha h(r) - rc)}.$$

Dans cette dernière inégalité, r est une variable libre quelconque. Un choix possible est évidemment l'exposant de Lundberg tel que

$$\alpha h(R) - Rc = 0,$$

qui conduit au résultat annoncé. ■

Chapitre 4

Processus de Markov et Files d'attente

4.1 Processus de Markov

Les processus aléatoires que l'on considère dans ce chapitre ont un large champ d'application dans la modélisation de systèmes réels. Ce sont des processus en temps continu analogues aux chaînes de Markov etudiées dans le cours de première année. Ils se caractérisent par la propriété de mémoire à court terme suivante. Connaissant l'état du processus au temps présent, la prédiction de l'état futur se fait indépendamment du passé du processus. Un exemple de processus de Markov en temps continu a déjà été rencontré. Il s'agit du processus de Poisson. Si l'on pose pour état au temps t le nombre total d'arrivées à cet instant, le processus de Poisson est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ et qui n'effectue des sauts que de l'état n vers l'état $(n+1)$, $n \geq 0$. Un tel processus s'appelle un *processus de naissance pure*. Plus généralement, un modèle dont les durées inter-transitions sont de loi exponentielle et qui effectue des transitions entre les états n et $(n+1)$ ou $(n-1)$ uniquement est appelé *processus de naissance et de mort*. On trouve des processus de naissance et de mort dans l'étude de populations biologiques par exemple, mais aussi lors de l'étude de files d'attente. Dans ce cas, le processus de naissance et de mort modélise la longueur de la file d'attente.

4.1.1 Définitions

Soit $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ un processus aléatoire à valeurs entières.

Définition 4.1.1 *On dit que le processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ est un processus de Markov si, pour tout $s, t \geq 0$, $i, j \in I\!N$ et $x_u \in I\!N$, $0 \leq u < s$,*

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i,\ X_u = x_u\ ,\ \forall 0 \leq u < s) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i)\,.$$

En d'autres termes, un processus de Markov est un processus ayant la propriété suivante. La loi conditionnelle de la variable future X_{t+s} sachant l'état présent X_s

et toute l'histoire du processus jusqu'au temps s ne dépend que du présent et est indépendante du passé. Si, de plus,

$$\mathrm{P}_{ij}(s,t) = \mathrm{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

ne dépend pas de s, le processus $\{X_t \; ; \; t \geq 0\}$ est dit *homogène*. Tous les processus de Markov considérés dans ce chapitre seront homogènes.

Supposons qu'un processus de Markov homogène $\{X_t \; ; \; t \geq 0\}$ se trouvait en i au temps $t = 0$ et qu'il n'ait pas quitté cet état durant l'intervalle de temps $[0, t]$. Cherchons à caractériser la loi conditionnelle de la variable aléatoire T_i égale à la durée de séjour dans l'état i. Soit $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_i > t+s \mid T_i > t) &= \mathrm{P}(T_i > t+s \mid X_t = i) \quad \text{par la propriété de Markov,} \\ &= \mathrm{P}(T_i > s) \quad \text{par homogénéité.} \end{aligned}$$

Ainsi, la variable T_i possède la propriété d'absence de mémoire qui caractérise la loi exponentielle. Le paramètre de cette loi dépend de l'état i. On note ce paramètre ν_i. Cette propriété d'absence de mémoire suggère une manière intuitive de construire un processus de Markov homogène quelconque.

1) Pour tout i dans $\mathbb{N}$, le temps de séjour dans l'état i (avant d'effectuer une transition vers un autre état) est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre ν_i.
2) Lorsque le processus "quitte" l'état i, il choisit d'aller en $j \neq i$ avec la probabilité p_{ij}. Les probabilités de transition vérifient donc

$$p_{ij} \geq 0 \quad ; \quad \sum_{j \neq i} p_{ij} = 1\,.$$

3) Toutes les durées de séjour sont indépendantes entre elles, et indépendantes des états de la chaîne.

Commentaires. En d'autres termes, un processus de Markov est un processus aléatoire qui effectue des transitions d'état en état suivant une chaîne de Markov (la chaîne incluse) de probabilités de transition p_{ij} et tel que le temps passé dans chaque état avant d'en visiter un autre est de loi exponentielle. Si les temps de séjour n'étaient pas des variables indépendantes, alors la prédiction de la valeur future du processus devrait tenir compte des temps passés dans chaque état. Ceci est en contradiction avec la propriété de Markov.

Exemple 4.1.1 Simulation. *L'algorithme suivant simule la variable X_T du processus $\{X_t \; ; \; t \geq 0\}$ à un temps T arbitraire. L'algorithme est initialisé de manière quelconque.*

Solution.

```
t := 0
Choisir un entier X
Repeter
i := X
Si ( nu[i] = 0 ) alors  t := T
Sinon
Choisir  j  avec la probabilite  p[i][j]
X := j
t := t - log(ALEA) / nu[i]
FinSi
Jusqu'a  (t > T) .
```

Dans le cas où $\nu_i = 0$ (nu[i] = 0), l'état i est dit *absorbant*. Quand le processus entre dans i, il y séjourne indéfiniment. ∎

Exemple 4.1.2 Un système réparable. *Un système est constitué d'un composant dont la durée de vie suit la loi exponentielle de paramètre λ (penser à une ampoule éléctrique, par exemple). Lorsque le composant tombe en panne, il est remplacé par un composant identique. La durée de réparation est aléatoire, de loi exponentielle de paramètre μ. Montrer que l'état du système au temps t évolue selon un processus de Markov dont on précisera les paramètres.*

Solution. Il s'agit d'un processus susceptible de prendre deux états que nous notons 0 et 1. La valeur 0 code pour l'état de panne et 1 pour l'état de bon fonctionnement. Alors

$$\nu_0 = \mu \quad \text{et} \quad p_{0,1} = 1$$

et

$$\nu_1 = \lambda \quad \text{et} \quad p_{1,0} = 1 \, .$$

∎

4.1.2 Equations de Kolmogorov

Soit $\{X_t \ ; \ t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs entières. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose

$$\forall i \neq j \, , \quad \lambda_{ij} = \nu_i p_{ij} \, .$$

La vitesse avec laquelle le processus sort de l'état i est ν_i et la probabilité avec laquel il entre dans j est p_{ij}. Ainsi, on peut interpréter λ_{ij} comme le *taux* avec lequel le processus partant de i entre en j. Bien entendu

$$\nu_i = \sum_{j \neq i} \nu_i p_{ij} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$$

et

$$\forall i \neq j \, , \quad p_{ij} = \lambda_{ij} / \nu_i \, .$$

Ainsi, la donnée de la famille $\{\lambda_{ij}\,;\, i \neq j\}$ détermine complètement le processus en question. Posons, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ et $s, t \geq 0$,

$$\mathrm{P}_{ij}(t) = \mathrm{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i)\,.$$

Il s'agit de la probabilité conditionnelle pour que le processus en i au temps s se trouve en j au temps $t+s$. Par homogénéité, cette grandeur ne dépend pas de s. La proposition suivante justifie la dénomination de taux de transition appliquée aux λ_{ij}.

Proposition 4.1.1 *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h > 0$*

$$\begin{array}{rcll} 1 - P_{ii}(h) & = & \nu_i h + o(h)\,; & \\ P_{ij}(h) & = & \lambda_{ij} h + o(h) & \text{lorsque } j \neq i\,. \end{array}$$

Démonstration. Nous avons, pour tout $j \neq i$, $h > 0$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(X_h = j \mid X_0 = i) & = & \mathrm{P}(T_i < h) p_{ij} + o(h) \\ & = & \nu_i h p_{ij} + o(h) \\ & = & \lambda_{ij} h + o(h)\,. \end{array}$$

La première assertion est évidente. Elle traduit simplement le fait que

$$\sum_j \mathrm{P}_{ij}(h) = 1\,.$$

■

La proposition suivante établit une propriété de semigroupe pour les probabilités de transition analogue à celle démontrée auparavant pour les chaînes de Markov.

Proposition 4.1.2 Propriété de semigroupe.

$$\forall s, t \geq 0, \qquad P_{ij}(t+s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ik}(t)\; P_{kj}(s)\,.$$

Démonstration. Conditionner aux valeurs de X_t et appliquer la propriété de Markov. ■

Définition 4.1.2 Générateur infinitésimal. *On appelle générateur infinitésimal la matrice dont le terme général est λ_{ij} pour $i \neq j$ et $-\nu_i$ pour le terme diagonal d'ordre i. Cette matrice est notée Λ*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\nu_0 & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \ldots \\ \lambda_{10} & -\nu_1 & \lambda_{12} & \ldots \\ . & . & & \\ . & . & & \end{pmatrix}.$$

Notons $p(t)$ la loi de la variable aléatoire X_t

$$\forall i \in I\!N, \quad p_i(t) = \mathrm{P}(X_t = i)\,.$$

La loi $p(t)$ peut se calculer comme la solution d'un système différentiel linéaire. Les équations de ce système sont appelées *équations de Kolmogorov.*

Théorème 4.1.1 Equations de Kolmogorov.

$$\frac{d}{dt}p = p\Lambda\,,$$

Soit

$$\forall j \in I\!N, \quad \frac{d}{dt}p_j = \sum_{i \neq j} p_i\,\lambda_{ij} \,-\, \nu_j\,p_j\,.$$

Commentaires. Les équations de Kolmogorov traduisent la dynamique du système indépendamment de la condition initiale. Lorsque l'espace d'état du processus est fini et que la loi initiale (loi de la variable X_0) est précisée, il y a une solution unique aux équations de Kolmogorov (il s'agit d'un problème de Cauchy).

Démonstration. Soit $h > 0$. D'après la formule des probabilités totales, nous avons

$$\forall j \in I\!N\,, \quad \mathrm{P}(X_{t+h} = j) = \sum_i \mathrm{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) p_i(t)\;.$$

D'après la propriété d'homogénéité, nous avons

$$\forall j \in I\!N\,, \quad \mathrm{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \mathrm{P}(X_h = j | X_0 = i)\;.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p_j(t+h) &= \sum_i \mathrm{P}(X_h = j | X_0 = i) p_i(t) \\ &= \sum_{i \neq j} p_i(t)\lambda_{ij}h + p_j(t)(1 - \nu_j h) + o(h) \end{aligned}$$

d'après la proposition 4.1.1. Nous avons donc

$$\frac{p_j(t+h) - p_j(t)}{h} = \sum_{i \neq j} p_i(t)\lambda_{ij} - \nu_j p_j(t) + \frac{o(h)}{h}\;.$$

Le résultat suit lorsque $h \to 0$. ∎

Exemple 4.1.3 *exemple 4.1.2 (suite). Ecrire les équations de Kolmogorov*

Solution. Dans cette situation, le générateur Λ est donné par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Les équations de Kolmogorov sont

$$\begin{aligned} p_0' &= -\mu p_0 + \lambda p_1 \\ p_1' &= \mu p_0 - \lambda p_1 \end{aligned}$$

En utilisant la relation,

$$p_0(t) + p_1(t) = 1\,,$$

On résout ce système pour trouver

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + (p_0(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu})\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_1(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + (p_1(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu})\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}$$

■

4.1.3 Processus de Poisson

Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de Markov. En effet, nous avons, pour tout $i \geq 0$

$$\nu_i = \lambda \quad \text{et} \quad p_{i,i+1} = 1\,.$$

Dans cette section, nous justifions l'aspect intuitif du processus de Poisson en obtenant la loi de Poisson à partir des équations infinitésimales. La référence à la définition de processus de Markov ne sera pas directement utilisée dans ce qui suit. Nous pouvons en fait donner une alternative à la definition 2.2.1, la definition 2.2.3.

Définition 4.1.3 *Le processus de comptage $\{N_t\,;\ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, si*

i) le processus est à accroissements indépendants et stationnaires ;
ii) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$;
iii) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

Commentaires. Un argument heuristique permet de bien comprendre pourquoi la loi de Poisson intervient de manière naturelle. Considérons l'intervalle de temps $(0, t)$ que nous subdivisons en n sous intervalles de longueur égale à t/n. La probabilité pour qu'une occurrence survienne dans $(kt/n, (k+1)t/n)$ est approximativement égale à $\lambda t/n$. Puisque les occurrences sont indépendantes, le nombre N_t d'occurrences dans $(0, t)$ "suit" la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda t/n)$. L'approximation binomiale-Poisson montre que l'on peut considérer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda t/n = \lambda t$. Nous justifions ceci de manière rigoureuse dans le théorème suivant.

Théorème 4.1.2 *Les définitions sont équivalentes.*

Démonstration. Nous montrons que *définition* 2.2.3 $\Longrightarrow$ *définition* 2.2.1. Posons

$$p_n(t) = \mathrm{P}(N_t = n)\,.$$

Montrons dans un premier temps que p_0 est solution d'une certaine équation différentielle

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= \mathrm{P}(N_{t+h} = 0) \\ &= \mathrm{P}(N_t = 0\,;\, N_{t+h} - N_t = 0) \\ &= \mathrm{P}(N_t = 0)\;\mathrm{P}(N_{t+h} - N_t = 0) \\ &= p_0(t)\,[1 - \lambda h + o(h)]\,. \end{aligned}$$

Dans la troisième équation, nous avons utilisé l'assertion i). Nous avons pu poursuivre en combinant ii) et iii) pour aboutir à la dernière équation. On obtient finalement

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda\, p_0(t) + \frac{o(h)}{h}\,.$$

En passant à la limite $h \to 0$, on obtient

$$p_0' = -\lambda\, p_0\,.$$

L'intégration de cette équation linéaire d'ordre un conduit, en tenant compte de la condition initiale $p_0(0) = 1$, à

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}\,.$$

En procédant de la même manière, pour tout $n > 0$, il vient

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \mathrm{P}(N_{t+h} = n) \\ &= \mathrm{P}(N_t = n\,;\, N_{t+h} - N_t = 0) \\ &\quad + \mathrm{P}(N_t = n-1\,;\, N_{t+h} - N_t = 1) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(N_t = n-k\,;\, N_{t+h} - N_t = k)\,. \end{aligned}$$

Par l'assertion iii), le dernier terme est d'ordre $o(h)$. En utilisant à nouveau l'assertion i), on otient

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= p_n(t)\, p_0(h) - p_{n-1}(t)\, p_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)\, p_n(t) + \lambda h\, p_n(t) + o(h)\,. \end{aligned}$$

Soit, en passant à la limite $h \to 0$

$$p_n'(t) = -\lambda\, p_n(t) + \lambda\, p_{n-1}(t)\,. \tag{4.1.1}$$

Posons

$$q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)\,.$$

Alors, en multipliant les deux termes par $e^{\lambda t}$, l'équation (4.1.2) se formule de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}q_n(t) = -\lambda\, q_{n-1}(t)\,.$$

On termine la démonstration en vérifiant par récurrence que

$$q_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!}$$

est l'unique solution de ce système sous la condition $q_n(0) = 0$. La réciproque est facile à établir. C'est un exercice. ■

4.1.4 Comportement asymptotique

Nous cherchons à caractériser le comportement asymptotique d'un processus de Markov homogène $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ dont l'espace d'état est égal à $I\!N$. Supposons que la variable X_t converge en loi vers une loi π et supposons que l'inversion des signes $\sum$ et lim soit licite. On obtient, par les équations de Kolmogorov

$$0 = \sum_j \pi_j \lambda_{ji} - \nu_i \pi_i\,.$$

soit

$$0 = \pi\Lambda$$

et, évidemment

$$\sum_i \pi_i = 1\,.$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, nous cherchons des conditions sous lesquelles ce système admet une solution unique. Pour simplifier la discussion, nous nous limitons à des ensembles d'état **finis**. L'existence d'une solution au système

$$0 = \pi\Lambda$$

est garantie par le fait que 0 est toujours valeur propre de Λ. Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'unicité d'une solution stationnaire est, comme pour les chaînes, liée à une notion de connexité du diagramme de transition du processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$.

Définition 4.1.4 *Le processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ est dit irréductible si*

$$\forall i, j\,, \quad \exists\, k_1, \ldots, k_n \ \ t.q.\ \lambda_{ik_1} > 0 \ \ et\ \ \ldots\ \ et\ \lambda_{k_n j} > 0\,.$$

L'interprétation est la même que pour les chaînes. Le problème de la périodicité ne se pose pas puisque les temps de transition sont aléatoires. On admet le résultat suivant

Théorème 4.1.3 *Si le processus $\{X_t \ ; \ t \geq 0\}$ est irréductible, alors la variable X_t converge en loi quand $t \to \infty$ vers la loi π solution de*

$$0 = \pi\Lambda \, .$$

indépendamment de la loi de la condition initiale X_0.

Exemple 4.1.4 *exemple 4.1.2 (suite). Loi stationnaire.*

Solution. Dans cet exemple, on vérifie facilement l'irréductibilité. La résolution des équations de Kolmogorov permet de vérifier l'unicité du comportement asymptotique. En effet, X_t converge en loi vers la loi

$$(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu}) \, .$$

■

4.1.5 Exercices

Exercice 41. On considère le processus aléatoire $\{X_t ; t \geq 0\}$ défini sur l'ensemble

$$E = \{1, 2, 3\}$$

de la manière suivante. Les temps de séjour dans l'état 1 sont des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre égal à 3.0. Lorsque le processus “sort” de cet état, il effectue une transition vers l'état 2 avec la probabilité 2/3 et vers l'état 3 avec la probabilité 1/3. Les temps de séjour dans l'état 2 sont des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre égal à 1.0. Lorsque le processus “sort” de l'état 2, il effectue une transition obligatoire vers l'état 1. L'état 3 est un état absorbant.

a) Montrer que X_t est un processus de Markov homogène (décrire le générateur infinitésimal de ce processus).
b) Ecrire les équations de Kolmogorov de ce processus.
c) On suppose que le processus démarre dans l'état 1 et on s'intéresse au temps d'atteinte de l'état 3

$$T = \inf\{t \geq 0 \ , \ X_t = 3\} \, .$$

Déterminer la loi de T à l'aide des équations précédentes.

Solution abrégée. Le générateur est égal à

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit $p_i(t) = \mathrm{P}(X_t = i)$, pour tout $i = 1, 2, 3$. Nous avons

$$p_3' = p_1$$

et

$$p_3'' = p_1' = -3p_1 + p_2$$

Puisque $p_2 = 1 - p_1 - p_3$, nous avons

$$p_3'' = 1 - 4p_3' - p_3.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\forall t \geq 0, \quad \mathrm{P}(T \leq t) = p_3(t)$$

et $p_3(0) = 0$, $p_3'(0) = p_1(0) = 1$. L'intégration de l'équation différentielle conduit à la solution suivante

$$\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3})e^{-(2+\sqrt{3})t} - \frac{1}{2}(1 + 1/\sqrt{3})e^{-(2-\sqrt{3})t}.$$

■

Exercice 42. Un système est constitué de deux éléments indépendants dont les durées de vie sont des variables aléatoires de lois $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$. Lorsque l'élément i ($i = 1, 2$) tombe en panne, il est remplacé par un élément dont les caractéristiques sont identiques. La durée de remise en fonctionnement du système est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mu_i)$ indépendante de la durée de vie de l'élément en défaut.

a) Décrire les différents états du système et les probabilités de transition entre ces différents états pendant un intervalle de temps infinitésimal.
b) En déduire que le processus d'évolution de ce système est markovien. Donner son générateur infinitésimal.
c) Existe-t-il un régime stationnaire ? Le caractériser.

Solution abrégée. Pour un couple de variables indépendantes (X_1, X_2) de loi marginales $\mathcal{E}(\mu_1)$ et $\mathcal{E}(\mu_2)$, la loi du minimum

$$Z = \min(X_1, X_2)\,,$$

est la loi $\mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$. De plus nous avons

$$\mathrm{P}(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X_2 > t)\mu_1 e^{-\mu_1 t} dt = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\,.$$

Avec les conventions de notation 0 pour *panne* et 1 pour *bon fonctionnement*, nous avons 4 états

$$E = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}.$$

D'aprés la remarque précédente, la loi du temps de séjour dans $(0,0)$ est la loi $\mathcal{E}(\mu_1+\mu_2)$ et la probabilité de transition de $(0,0)$ vers $(1,0)$ est $\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$. Le taux de transition entre ces deux états est donc μ_1. Les autres taux se déduisent de raisonnements similaires. En fin de compte, le générateur est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) & \mu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

La loi de probabilité invariante se déduit de la remarque que les 2 composants sont indépendants. Donc nous avons

$$\pi_{(i,j)} = \pi_i^1 \pi_j^2 \,, \quad \forall i, j = 0, 1$$

où π^1 et π^2 sont les lois invariantes associées à chacun des composants

$$\pi^1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}, \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} \right)$$

et

$$\pi^2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}, \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} \right).$$

■

Exercice 43. Un système est constitué de trois composants A, B, C dont les durées de vie sont des variables aléatoires X, Y, Z indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mathcal{E}(\mu)$ et $\mathcal{E}(\nu)$. A l'instant initial, les trois composants sont en état de bon fonctionnement. La mise en défaut de C ou la mise en défaut des deux composants A et B (simultanément) entraînent la panne du système.

a) Décrire les différents états susceptibles d'être pris par le système au cours du temps.
b) Soit W_t l'état du système au temps $t \geq 0$. Montrer que $\{W_t\,;\, t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène. Préciser son graphe de transitions et son générateur infinitésimal.
c) Ecrire les équations de Kolmogorov associées à ce processus puis les résoudre.
d) Soit T la durée de vie du système. A l'aide de la question précédente, donner une expression de la probabilité $\mathrm{P}(T > t)$.
e) En déduire $E[T]$.

Solution abrégée. Considérons les 4 états suivants. Dans l'état 1, les 3 composants A, B, C fonctionnent. Dans l'état 2, A est en panne alors que B, C fonctionnent. Dans l'état 3, B est en panne alors que A, C fonctionnent. Dans l'état 4, le système est en panne. Le générateur correspondant à W_t est décrit par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu+\nu) & \lambda & \mu & \nu \\ 0 & -(\mu+\nu) & 0 & (\mu+\nu) \\ 0 & 0 & -(\lambda+\nu) & (\lambda+\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'état 4 est absorbant. D'après les équations de Kolmogorov, nous avons

$$p_1' = -(\lambda+\mu+\nu)p_1.$$

Ceci conduit à

$$\forall t \geq 0, \quad p_1(t) = \exp(-(\lambda+\mu+\nu)t).$$

De plus, nous avons

$$p_2' = \lambda p_1 - (\mu+\nu)p_2.$$

En prenant la transformée de Laplace $\ell_2(s) = Lp_2(s)$, nous obtenons

$$\ell_2(s) = \frac{\lambda}{(s+\mu+\nu)(s+\lambda+\mu+\nu)} = \left(\frac{1}{s+\mu+\nu} - \frac{1}{s+\lambda+\mu+\nu}\right).$$

Nous inversons

$$\forall t \geq 0, \quad p_2(t) = e^{-(\mu+\nu)t} - e^{-(\lambda+\mu+\nu)t}.$$

De même, nous obtenons

$$\forall t \geq 0, \quad p_3(t) = e^{-(\lambda+\nu)t} - e^{-(\lambda+\mu+\nu)t}.$$

Finalement, nous avons

$$\forall t \geq 0, \quad \mathrm{P}(T > t) = 1 - p_4(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$$

et

$$E[T] = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)dt = \frac{1}{\lambda+\nu} + \frac{1}{\mu+\nu} - \frac{1}{\lambda+\mu+\nu}$$

Pour des valeurs de paramètre toutes égales à 1, nous observons que $E[T] = 2/3$. Cette valeur naturellement inférieure à la durée de vie du composant C. ∎

Exercice 44. On considère un processus de Markov $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ sur $E = \{1, 2, 3\}$ de générateur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda > 0\ .$$

a) Représenter le graphe de transition, écrire les équations de Kolmogorov et déterminer la loi stationnaire de ce processus.

b) Pour tout $t \geq 0$, on pose $p_0(t) = \mathrm{P}(X_t = 0)$. Montrer que p_0 est solution de l'équation différentielle

$$p_0'' + 3\lambda p_0' + 3\lambda^2 p_0 = \lambda^2 \ . \tag{4.1.2}$$

c) Montrer que les solutions de l'équation (4.1.2) sont de la forme

$$\forall t \geq 0 \ , \quad p(t) = \frac{1}{3} + e^{-3\lambda t/2}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t)\right)$$

où A et B sont des constantes réelles.

d) On suppose $X_0 = 1$. Quelle est la valeur de $p_0'(0)$ dans ce cas ? Déterminer p_0 et tracer la courbe correspondante en fonction de $t \geq 0$.

Exercice 45. Un système est composé de deux unités identiques dont les durées de vie sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. En cas de panne de l'une des deux unités, le système continue à fonctionner avec la probabilité c. L'unité en panne est alors réparée avec un taux égal à μ (i.e la durée de réparation est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\mu)$). Lorsque le systéme ne fonctionne plus, on le remplace avec un taux ν par un système neuf identique.

a) Modéliser ce système par un processus de Markov à trois états. En donner le générateur.

b) Ecrire les équations de Kolmogorov. Résoudre ce systéme dans le cas

$$\lambda = 1, \mu = 1, \nu = 1, c = 1/2.$$

Conclusions ? En déduire la *disponibilité* du système à l'instant t c'est à dire la probabilité pour qu'à l'instant t le système soit en état de fonctionner.

c) La notion de *durée de vie* c'est à dire la durée du fonctionnement en continu est intéressante pour l'utilisateur. Pour l'étudier, on rend l'état de panne absorbant en supprimant la possibilité de réparation. Ecrire les équations de Kolmogorov relatives à ce système et le résoudre pour

$$\lambda = 1, \mu = 1, c = 1/2.$$

En déduire la loi du comportement en continu. Conclusions ?

Exercice 46. Soit $\{Z_t \ , \ t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs dans l'espace d'états $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de générateur Λ égal à :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Représenter le diagramme de transitions élémentaires de ce processus.
b) Supposons $Z_0 = 1$. Quelle est la loi du temps total passé dans l'état 1 ?
c) Supposons $Z_0 = 2$. Déterminer la loi de Z_t pour tout $T \geq 0$. Il y a t il convergence en loi de la variable Z_t lorsque t tend vers l'infini ?
d) Supposons $Z_0 = 5$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, la loi de la variable Z_t est donnée par le sextuplet

$$(0, 0, 2\pi_t(1-\pi_t), 0, (1-\pi_t)^2, \pi_t^2)$$

où π_t est une fonction de t que l'on déterminera. En déduire la convergence en loi de la variable Z_t lorsque t tend vers l'infini.
e) Décrire l'ensemble des probabilités stationnaires.
f) La loi de Z_0 étant donnée, quelle est la limite en loi de Z_t lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 47. Un système est décrit par 3 états différents. Les états 1 et 2 correspondent au bon fonctionnement du système, alors que l'état 3 correspond à l'état de panne. On suppose que l'évolution du système dans le temps peut être modélisée à l'aide d'un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ de générateur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\alpha+\lambda) & \alpha & \lambda \\ \alpha & -(\alpha+\lambda) & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

où α, λ et μ sont des constantes strictement positives. On suppose que $X_0 = 1$.
1) Quelles sont les lois de probabilité invariantes associées au générateur Λ ? Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ converge-t-il en loi ?
2) Quelle est la loi du temps de séjour dans l'état 1 avant la première visite en 2 ou 3 ?
3) Calculer la probabilité de l'événement

$$A_t = \text{“Le système est en panne au temps } t\text{”} ,$$

pour tout $t \geq 0$.
4) On note S_t le temps total passé en état de panne entre les instants 0 et t. Ecrire S_t comme l'intégrale entre 0 et t de la fonction indicatrice d'un événement dépendant du temps. Calculer $E[S_t]$, pour tout $t \geq 0$, et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[S_t]}{t} .$$

5) Calculer la probabilité pour que le système se trouve dans l'état 1 au temps t.

4.2 Processus de naissance et de mort

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1 *Un processus de naissance et de mort est un processus de Markov homogène à valeurs dans $I\!N$ tel que*

$$\begin{aligned} \lambda_{i\,i+1} &= \lambda_i\,, \\ \lambda_{i\,i-1} &= \mu_i\,, \\ \lambda_{i\,j} &= 0 \quad \text{si } j \neq i, i-1, i+1\,, \end{aligned}$$

où $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$ et $i \in I\!N$.

Commentaires. On interprète un tel processus en admettant que X_t est la taille d'une population à l'instant t. Si la population se compose de i individus au temps t, le taux instantané de naissance d'un nouvel individu est λ_i tandis que le taux instantané de disparition d'un individu est μ_i.

Le générateur d'un processus de naissance et de mort est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & . & . & . \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & . & . \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & . \\ 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Les équations de Kolmogorov d'un processus de naissance et de mort sont

$$\begin{aligned} p_0' &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ p_j' &= \lambda_{j-1} p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) p_j + \mu_{j+1} p_{j+1}\,, \quad \forall j \geq 1\,. \end{aligned}$$

Les processus de naissance purs sont des processus pour lesquels

$$\forall i \in I\!N, \quad \mu_i = 0\,.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} p_0' &= -\lambda_0 p_0 \\ p_j' &= \lambda_{j-1} p_{j-1} - \lambda_j p_j\,, \quad \forall j \geq 1\,. \end{aligned}$$

On retrouve le processus de Poisson d'intensité λ quand $\lambda_i = \lambda$. La solution de ces équations est alors

$$p_j(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}\,,\ \forall j \geq 0\,.$$

On dit qu'un processus de naissance et de mort n'*explose* pas en temps fini si

$$\forall t \geq 0\,, \quad \mathrm{P}(X_t < \infty) = \sum_{n \in I\!N} \mathrm{P}(X_t = n) = 1\,.$$

Remarque. On peut montrer qu'un processus de naissance et de mort n'explose pas en temps fini si et seulement si la série $\sum 1/\lambda_i$ diverge.

4.2.2 Comportement asymptotique

Théorème 4.2.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de naissance et de mort irréductible admette une unique loi stationnaire est que la série*

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}$$

soit convergente. Dans ce cas, la distribution stationnaire est donnée par

$$\pi_0 = \frac{1}{1+S}$$

et

$$\pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_j}\, \pi_0 \,, \ \forall j \geq 1.$$

Démonstration. D'après les résultats du paragraphe précédent, on doit avoir

$$\pi \Lambda = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

soit

$$\begin{array}{rcl}
-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 & = & 0 \\
\lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 \pi_1 + \mu_1 \pi_1) + \mu_2 \pi_2 & = & 0 \\
\lambda_{j-1} \pi_{j-1} - (\lambda_j \pi_j + \mu_j \pi_j) + \mu_{j+1} \pi_{j+1} & = & 0 \\
. & = & . \\
. & = & .
\end{array}$$

De ces premières équations, on tire

$$\begin{array}{rcl}
\pi_1 & = & \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0 \\
\pi_2 & = & \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0 \\
. & = & . \\
\pi_j & = & \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \pi_0 \\
. & = & .
\end{array}$$

La deuxième condition s'écrit donc $S\pi_0 + \pi_0 = 1$ soit $\pi_0 = 1/(1+S)$. Le système admet donc une solution ssi $S < \infty$. ∎

4.2.3 Exercices

Exercice 48. - Processus de Yule -

On considère un processus de naissance pur $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ dans lequel chacun des individus peut donner naissance à un nouvel individu avec un taux $\lambda > 0$.

a) Ecrire les équations de Kolmogorov de ce processus.
b) En supposant que la population initiale comporte un seul individu, montrer que la variable X_t est, pour tout $t \geq 0$, de loi $\mathcal{G}(e^{-\lambda t})$.
c) En déduire que la population n'explose pas en temps fini et donner la taille moyenne de cette population au temps t.
d) Montrer que la variable $X_t e^{-\lambda t}$ converge L^2 vers 1 lorsque λ tend vers zéro.

Exercice 49. Un biologiste observe une population cellulaire qui évolue de la manière suivante.

- Le nombre initial de cellules est égal à $n > 1$;
- une cellule se divise aux instants aléatoires d'un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- lorsqu'une nouvelle cellule est apparue, son processus de division est indépendant des autres cellules.

Soit X_t le cardinal de la population cellulaire au temps $t > 0$.

a) Montrer que $\{X_t ; t \geq 0\}$ est un processus de Markov dont on précisera les taux.
b) A l'aide des équations de Kolmogorov, montrer que

$$E[X_t] = n \exp(\lambda t).$$

c) Soit $T_1 < T_2 < \ldots$ la suite des instants de création de nouvelles cellules. Justifier que les variables $X_n = T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes. Quelle est la loi de X_n ?
d) Démontrer

$$\ln(1 + m/n)/\lambda \leq E[T_m] \leq \ln(1 + m/(n-1))/\lambda.$$

Exercice 50. Un système en période de test est susceptible de produire un nombre aléatoire N_t de défaillances au temps $t > 0$. Afin de prendre en compte l'amélioration de ce système au cours du temps, on modèlise l'intensité conditionnelle du processus $\{N_t \ , \ t \geq 0\}$ de la manière suivante

$$\lambda_t \ = \ \frac{\theta}{1 + \alpha N_t} \ , \quad \theta > 0 \ , \ \alpha > 0.$$

a) Vérifier que $\{N_t \ , \ t \geq 0\}$ est un processus de Markov à valeurs entières dont on déterminera les taux de transitions.

b) Montrer que

$$\frac{dE(N_t)}{dt} = E[\frac{\theta}{1+\alpha N_t}].$$

c) Vérifier que la fonction définie pour tout $x > 0$ par

$$g(x) = \frac{\theta}{1+\alpha x}$$

est convexe. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Jensen,

$$E[N_t] \geq \frac{\sqrt{1+2\alpha\theta t} - 1}{2} .$$

d) Quelle est la loi de l'intervalle de temps X_n séparant les $n$ième et $(n+1)$ième défaillances ? Les variables (X_i) sont elles indépendantes ?

e) Soit T_n l'instant de n^{e} occurrence. Calculer $E[T_n]$.

f) Déduire de la question précédente les équations des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres θ et α au vu d'une observation $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ des n premiers intervalles inter-défaillances.

g) Reprendre la question précédente au vu d'une observation $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, N_t = n)$ du processus au temps t.

4.3 Files d'attente

L'origine des travaux sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1909-1920 avec les travaux de A.K. Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. La théorie mathématique s'est ensuite développée notamment grâce aux contributions de Palm, Kolmogorov, Khintchine, Pollaczek etc et fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie s'étend ensuite à de nombreux champs d'application comme la gestion de stocks, les télécommunications en général, la fiabilité de systèmes complexes etc. Actuellement, les réseaux de files d'attente interviennent dans la conception de nouveaux ordinateurs et dans l'évaluation des performances des systèmes existants. Voici une liste non exhaustive de problèmes concrets abordés par la théorie des files d'attente.

- Combien de lignes téléphoniques doit on gérer pour que l'attente de communication soit raisonnable ?
- Combien de caisses dans un supermarché ? Comment adapter le type de guichets (caisses rapides, etc) et leur nombre au flux des clients ?
- Comment gérer les feux de circulation dans une grande agglomération afin d'obtenir un trafic fluide ?
- Comment déterminer le nombre optimal de postes à un péage autoroutier ?

4.3.1 Description d'un système de file d'attente

Un système de file d'attente se décrit par un processus d'arrivée de clients, un mécanisme de service et une discipline d'attente.

A. Processus d'arrivée. Nous supposons que les clients arrivent *indépendamment* les uns des autres. Les durées inter-arrivées $(X_n)_{n\geq 1}$ sont donc *indépendantes*. Nous supposons de plus que ces variables sont de même loi : le processus d'arrivée est un processus de renouvellement. Voici une liste d'arrivées possibles et les notations associées :

- arrivées à intervalles réguliers (chaîne de montage) : D (déterministe),
- arrivées poissonniennes : M (Markov),
- arrivées à intervalles suivant une loi d'Erlang : E_k égale à la loi gamma $G(k, \lambda)$,
- arrivées à intervalles suivant une loi générale : GI.

B. Discipline de service. Les durées de services $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont des variables *positives indépendantes et de même loi*. Voici une liste de services possibles et les notations associées :

- services de durée constante : D (déterministe),
- services de durée suivant une loi exponentielle : M (Markov),
- services de durée suivant une loi d'Erlang : E_k,
- services de durée suivant une loi générale : G.

C. Discipline d'attente. Nous listons ci-dessous les différentes disciplines d'attente.

FIFO	Premier arrivé, premier servi
FCFS	idem
LIFO	Dernier arrivé, premier servi
LCFS	idem
RSS	Sélection au hasard d'un client en attente

Cette liste n'est pas complète. On peut définir d'autres types de priorité. Il faut alors déclarer précisément la manière dont les clients entrent en service. Lorsqu'il y a plusieurs serveurs en particulier, on peut par exemple

- affecter les clients aux serveurs par rotation,
- créer une file d'attente unique,
- créer une file d'attente par serveur.

D. Classification des files d'attente. Il existe une nomenclature pour classer les files d'attente. Cette nomenclature est définie de la manière suivante. Une file d'attente spécifique est désignée par le symbole

Arrivée / Service / Nombre de serveurs / Capacité maximale de la file / Nombre maximal de clients potentiels / Discipline de service

Exemple 4.3.1 *La file décrite par le symbole*

$$M/M/1/5/\infty/LIFO$$

est une file dont les arrivées se font selon un processus de Poisson. Les services suivent la loi exponentielle et la file est constituée d'un unique serveur. On ne peut accepter plus de 5 clients en attente alors que le nombre de clients potentiels est illimité. La discipline de service est celle du dernier arrivé premier servi.

Convention. La plupart du temps seul les trois premiers items sont spécifiés pour décrire une file d'attente. Par défaut, on utilise la convention suivante

- Capacité maximale de la file : ∞
- Nombre maximal de clients potentiels : ∞
- Discipline de service : FIFO.

Ainsi la file d'attente

$$M/M/1/\infty/\infty/\text{FIFO}$$

se note simplement

$$M/M/1 \ .$$

Convention. On note λ le *taux d'arrivée des clients*. Cela signifie que l'espérance de la durée séparant deux arrivées successives est

$$E[X_1] = \frac{1}{\lambda} \ .$$

On note μ le *taux de service*. Cela signifie que l'espérance de la durée de service est

$$E[Y_1] = \frac{1}{\mu} \ .$$

L'**intensité de trafic** s'exprime de la manière suivante

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E[Y_1]}{E[X_1]} \ .$$

Ce rapport de deux durées est une variable sans dimension. On l'exprime pourtant souvent dans une unité appelée *Erlang*.

Nous notons X_t le nombre de clients en attente ou en service à l'instant t. La théorie des files d'attente s'intéresse en particulier à l'étude du processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ et à son comportement asymptotique. Si ce processus admet un régime stationnaire indépendamment de la condition initale, nous notons

$$\forall n \geq 0\ , \quad \pi_n = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(X_t = n),$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \ .$$

On dit alors que le processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ est régulier.

Les notations suivantes seront utiles par la suite. Nous notons L le nombre de clients dans l'état stationnaire et L^q le nombre de clients *en attente* dans le régime stationnaire. Ainsi, nous avons, pour la file $M/M/1$,

$$\forall n \geq 0\,, \quad \pi_n = \mathrm{P}(L = n)$$

et

$$L^q = \begin{cases} L-1 & \text{si } L \geq 1\,, \\ 0 & \text{si } L = 0\,. \end{cases}$$

Nous notons encore W la durée de séjour d'un client en régime stationnaire et nous admettrons finalement la célébre formule suivante connue sous la dénomination de *formule de Little*

$$E[L] = \lambda E[W]\,.$$

Cette formule exprime tout simplement le fait qu'en régime stationnaire le nombre moyen de client dans la file est égal au taux d'arrivée des clients multiplié par le temps moyen d'attente des clients. Cette formule rappelle un comportement *poissonnien* de la longueur de la file d'attente en régime stationnaire.

4.3.2 Files d'attente formant un processus de naissance et de mort

Une file d'attente simple : $M/M/1$**.** Dans une file d'attente $M/M/1$, les clients se présentent à un serveur selon un processus de Poisson de paramètre λ et sont servis les uns après les autres. Les durées de service sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre μ. Nous nous intéressons à l'évolution du nombre X_t de clients présents dans la file d'attente ou en service au temps $t > 0$. Le processus $\{X_t\ ;\ t \geq 0\}$ est un processus de naissance et de mort de taux

$$\forall i \in I\!N\,, \quad \lambda_i = \lambda\,, \quad \mu_i = \mu\,.$$

Posons $\rho = \lambda/\mu$. La série S s'écrit

$$S = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots$$

Elle converge ssi $\lambda < \mu$. On a alors

$$\forall j \in I\!N\,, \quad \pi_j = (1-\rho)\rho^j$$

et π est une loi géométrique décalée à gauche (i.e partant de 0).

La condition $\lambda < \mu$ est bien entendu équivalente à la condition $\rho < 1$. Ainsi, un régime stationnaire peut exister si (et seulement si) l'intensité de trafic est inférieure à cent pour cent. On voit de plus l'importance synthétique que joue ce paramètre lorsque l'on calcule le nombre moyen de clients en régime stationnaire

$$E[L] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1-\rho}\ ,$$

la longueur moyenne de la file d'attente

$$E[L^q] = E[(L-1)\mathbb{1}_{(L\geq 1)}] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1-\rho} ,$$

et la durée moyenne d'attente en régime stationnaire

$$E[W] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} .$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.3.1 *Soit* $0 < \lambda < \mu$. *Dans le système M/M/1, la variable aléatoire W égale à la durée de séjour des clients dans le système en régime stationnaire suit une loi exponentielle de paramètre* $\mu(1-\rho) = \mu - \lambda$.

Démonstration. Sachant qu'il y a n clients dans le système lorsqu'un nouveau client arrive, nous avons

$$W = Y_1 + \ldots + Y_{n+1}.$$

Le temps d'attente du nouveau client est la somme de $n+1$ durées de services : celle du nouveau client, celle du client en service, plus celles des $(n-1)$ autres clients. Un conditionnement classique donne la densité de la variable W

$$\forall t \geq 0 , \quad f_W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n f_{Y_1+\ldots+Y_{n+1}}(t) .$$

En prenant la transformée de Laplace des deux termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} Lf_W(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n [Lf_{Y_1}(s)]^{n+1} \\ &= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(1-\rho)\mu}{(1-\rho)\mu + s} \end{aligned}$$

D'où, après inversion

$$\forall t \geq 0 , \quad f_W(t) = (1-\rho)\mu e^{-(1-\rho)\mu t} .$$

■

Commentaires. Il est possible, dans ce cas très simple de vérifier sans difficulté la formule de Little.

Application. *Temps de réponse d'un ordinateur.* Considérons un ordinateur ne tolérant qu'un seul utilisateur de son processeur à la fois. On connecte n terminaux à cet ordinateur. Le fonctionnement de ce système va alors être identique à celui d'une file d'attente M/M/1. Supposons que le temps de traitement d'une tâche sur le processeur soit exponentiellement distribué de moyenne 500 *ms*. Supposons encore que l'intervalle de temps entre deux requêtes provenant d'un même terminal suive une loi exponentielle de moyenne 20 *s*. Les paramètres de la file d'attente sont alors

$$\mu = 2 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{n}{20} \; .$$

Le taux $\lambda = n/20$ se justifie si l'on se rappelle qu'une superposition de processus de Poisson indépendants de paramètre α est à nouveau un processus de Poisson dont le paramètre est $n\alpha$. Par définition, le temps de réponse sera égal à l'espérance du temps d'attente dans le système c.a.d $E[W]$. Les calculs précédents ont montré que

$$E[W] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{20}{40 - n} \; .$$

La condition à imposer pour que l'ordinateur puisse traiter toutes les tâches est

$$\lambda < \mu$$

soit

$$n < 40 \; .$$

Pour $n = 36$ par exemple, nous trouvons un temps de réponse égal à 5 secondes. On verra que si l'ordinateur tolère deux utilisateurs simultanément, le modèle mathématique est M/M/2 et le temps de réponse pour 36 terminaux devient

$$E[W] = 0.28 \text{ sec},$$

soit un temps de réponse vingt fois moindre.

La file d'attente $M/M/s$. Dans cette file d'attente, les arrivées se font selon un processus de Poisson de paramètre λ, les temps de services sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre μ. A la différence de la file $M/M/1$, le système n'est pas constitué d'un unique serveur mais d'un nombre arbitraire s de serveurs ($s \geq 1$). dans ce cas, on a encore un processus de naissance et de mort avec, pour tout $n \geq 0$,

$$\lambda_n = \lambda$$

et

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } n \leq s, \\ s\mu & \text{si } n > s. \end{cases}$$

On considère pour ce système une intensité de trafic normalisée par le nombre de serveurs

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \; .$$

Le régime stationnaire du processus de naissance et mort associé existe si et seulement si

$$\rho < 1 \, .$$

Nous avons, pour tout $n \geq 0$,

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(s\rho)^n}{n!}\pi_0 & \text{si } n \leq s, \\ \\ \frac{(s\rho)^n}{s!s^{n-s}}\pi_0 & \text{si } n > s \end{cases}$$

et

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^n}{n!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} .$$

Exercice 51. Démontrer que la longueur moyenne de la file d'attente en régime stationnaire est égale à

$$E[L^q] = \frac{s^s \rho^{s+1}}{(1-\rho)^2 s!}\pi_0$$

Solution. La longueur L^q est égale à 0 si $L \leq s$ et elle est égale à $L - s$ sinon. Nous avons donc

$$E[L^q] = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)\frac{(s\rho)^n}{s!s^{n-s}} = \frac{s^s\rho^s}{s!}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n.$$

■

La file d'attente $M/M/1/k$. Dans cette file d'attente markovienne, il n'y a qu'un seul serveur, mais la capacité du système est limitée à k clients au total. Cela signifie que les clients qui arrivent lorsque le système est saturé sont définitivement rejetés. Avec les conventions de notation utilisées précédemment, nous avons affaire à un processus de naissance et de mort de taux définis pour tout $n \geq 0$ par

$$\mu_n = \mu$$

et

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{si } n < k, \\ 0 & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

Puisque la capacité est limitée, nous obtenons un régime stationnaire indépendant des conditions initiales quelle que soit la valeur de l'intensité de trafic $\rho = \lambda/\mu$. Nous avons

$$\forall n \geq 0 \, , \quad \pi_n = \pi_0 \rho^n$$

et, pour $\rho \neq 1$,

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \, .$$

Exercice 52. Pour $\rho \neq 1$, montrer que le nombre moyen de clients en régime stationnaire est égal à

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} .$$

4.3.3 Files d'attente $M/GI/1$.

Des clients arrivent à une unité de service à des instants aléatoires suivant un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. Quand le serveur est occupé, les clients attendent leur tour. Les durées de service des clients successifs sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de probabilité de fonction de répartition G et de moyenne $\frac{1}{\mu}$ et de variance σ^2. Pour tout $n > 0$, on note X_n le nombre total de clients dans l'unité de service à l'instant de départ du n^{e} client servi et A_n le nombre de clients arrivés pendant le service du n^{e} client.

Proposition 4.3.2 *La suite (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ 0 & 0 & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

où

$$\forall k \geq 0 , \quad a_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dG(t) .$$

Démonstration. La démonstration s'appuie sur la remarque suivante. Pour tout n,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0, \\ A_{n+1} & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

Par le caractère poissonnien du processus d'arrivée, la variable aléatoire A_{n+1} est indépendante des variables $X_n, \ldots, X_1$. En conséquent, le processus (X_n) possède la propriété de Markov. De plus, nous avons

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \mathrm{P}(A_{n+1} = j - i + 1) & \text{si } i > 0 , \\ \mathrm{P}(A_{n+1} = j) & \text{si } i = 0 . \end{cases}$$

Les variables (A_n) sont indépendantes et de même loi. La chaîne (X_n) est donc homogène. Sachant que la durée du n^{e} service est égale à t, nous avons

$$\mathrm{P}(A_n = k \mid \text{durée du } n^{\text{e}} \text{ service } = t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} .$$

Ainsi, après conditionnement, nous avons

$$a_k = \mathrm{P}(A_n = k) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} dG(t) \ .$$

$\blacksquare$

Commentaires. L'approche utilisée lors de la la démonstration de ce résultat consiste à associer au processus $\{X_t \ , \ t \geq 0\}$ qui n'est pas markovien, des instants $\tau_1, \tau_2, \ldots$ pour lesquels (X_{τ_n}) est une chaîne de Markov. Cette chaîne de Markov est appelée *chaîne incluse* du processus et les instants $\tau_1, \tau_2, \ldots$ sont appelés *instants de régénération* du processus. Cette approche est permise par l'hypothèse d'arrivée poissonnienne et ne pourrait être utilisée dans le cadre d'une file d'attente $GI/GI/1$ par exemple...

Nous étudions maintenant le comportement asymptotique de la file d'attente à travers le comportement de la chaîne incluse.

Proposition 4.3.3 *La chaîne de Markov (X_n) est irréductible, apériodique. Elle admet une unique loi de probabilité invariante si et seulement si*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \ .$$

Dans ce cas, nous avons

$$\forall k \geq 0 \ , \quad \lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \pi_k,$$

où π est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ de fonction génératrice égale à

$$\forall |z| < 1 \ , \quad G(z) = \frac{(1-\rho)A(z)}{1 - \frac{1-A(z)}{1-z}} \ .$$

où

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ .$$

Démonstration. Cherchons les solutions du système $\pi = \pi P$. Il s'écrit ici

$$\pi_n = a_n(\pi_0 + \pi_1) + a_{n-1}\pi_2 + \cdots + a_0 \pi_{n+1} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Multiplions par z^n. En sommant toutes les équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} G(z) &= (\pi_0 + \pi_1)A(z) + \pi_2 z A(z) + \pi_3 z^2 A(z) + \cdots \\ &= \pi_0 A(z) + \frac{A(z)}{z}[G(z) - \pi_0] \end{aligned}$$

On tire de cette équation

$$G(z) = \frac{\pi_0 A(z)}{1 - \frac{1-A(z)}{1-z}} \ .$$

Cette équation admet une solution convenable si $G(1) = 1$. Comme $A(1) = 1$ et

$$\lim_{z \to 1} \frac{1 - A(z)}{1 - z} = A'(1) = \rho \ ,$$

il faut donc que

$$\pi_0 = 1 - \rho > 0 \ .$$

Ceci équivaut à

$$\rho < 1 \ .$$

■

Nous terminons ce paragraphe en énoncant la *formule de Pollaczek-Khintchine*. Cette formule décrit le temps moyen passé dans le système en régime stationnaire.

Proposition 4.3.4 *(Pollaczek-Khintchine) Pour la file $M/GI/1$, nous avons*

$$E[W] = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} \ .$$

Démonstration. Considérons la fonction de Heavyside

$$\forall x \in I\!R \ , \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \ , \\ 1 & \text{si } x > 0 \ . \end{cases}$$

La variable X_{n+1} se réécrit

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - H(X_n) \ .$$

Elevons les deux membres au carré

$$E[X_{n+1}^2] = E[X_n^2] + E[A_{n+1}^2] + E[U^2(X_n)] + 2E[X_n A_{n+1}] - 2E[X_n U(X_n)] - 2E[A_{n+1} U(X_n)] \ .$$

Soit L la longueur de la file en régime stationnaire. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} E[X_n] = E[L] \ .$$

Notons que

$$E[H(X_n)] = \mathrm{P}(X_n > 0)$$

et que

$$\lim_{n \to \infty} E[H(X_n)] = \lim_{n \to \infty} E[A_n] = 1 - \pi_0 = \rho \ .$$

Après calculs, il vient

$$0 = \lim_{n \to \infty} E[A_{n+1}^2] + \rho + 2\rho E[L] - 2E[L] - 2\rho^2 \ .$$

Comme $Var(A_{n+1}) = \lambda^2\sigma^2 + \rho^2$ (exercice à traiter à l'aide de la transformée de Laplace), on a

$$E[L] = \rho + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} \ .$$

Le résultat découle de la formule de Little. ■

4.3.4 Exercices

Exercice 53. Déterminer la loi stationnaire de la file d'attente $M/M/s/k$.

Exercice 54. Déterminer la loi stationnaire de la file d'attente $M/M/1/\infty/k$. Calculer $E[L]$.

Exercice 55. Déterminer la loi stationnaire de la file d'attente $M/M/\infty$. Calculer $E[L]$.

Exercice 56. Salon de coiffure. Des clients arrivent dans un salon de coiffure pour hommes suivant un processus de Poisson homogène d'intensité λ. Une proportion p d'entre eux désirent une coupe de cheveux et $1 - p$ un rasage. Les durées de service sont de lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 dans chaque cas. Lorsqu'un client arrive et trouve deux clients (1 en service, 1 en attente), il se décourage.
Soit X_t l'état du salon à l'instant t. Il y a cinq états possibles.

a) 0 : pas de clients ;
b) 1 et 2 : 1 ou 2 clients, celui qui est en service se fait coiffer ;
c) 3 et 4 : 1 ou 2 clients, celui qui est en service se fait raser.

Quelle est la proportion de clients perdus en régime stationnaire ?

Exercice 57. Un serveur est sollicité par l'arrivée de clients selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Les durées de service des clients sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\mu)$, $\mu = 1$. Le serveur traite une seule requête à la fois et tolère au plus un client en attente. Les clients qui arrivent et trouvent le système saturé sont rejetés.

a) Montrer que l'on peut modéliser l'évolution ce système à l'aide d'un processus de Markov à trois états. Donner le graphe de transition de ce processus en précisant les taux associés.
b) Ecrire les équations de Kolmogorov associées à ce processus.
c) Exprimer la probabilité qu'un client soit rejeté au temps t.
d) Chaque service occasionne un gain $\gamma > 0$ pour le serveur. Quel est le gain asymptotique moyen par unité de temps ?

Exercice 58. Des clients arrivent dans un système constitué de deux serveurs. Le processus de comptage associé à l'arrivée des clients est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Lorsqu'un client trouve les deux serveurs libres, il se dirige vers l'un d'entre eux avec une probabilité égale à $1/2$. Lorsqu'un serveur est occupé et l'autre libre, le client se dirige vers le serveur libre. Lorsque les deux serveurs sont occupés, le client est rejeté définitivement du système. A l'instant initial, les deux serveurs sont libres. Toutes les durées de services sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

a) Montrer que l'on peut modéliser l'évolution du nombre de clients présents dans le système par un processus de Markov à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, de générateur

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce processus admet une unique loi stationnaire. Déterminer cette loi.

b) On suppose désormais que $\lambda = \mu = 1$. Quelle est la probabilité stationnaire pour qu'un client soit rejeté du système à son arrivée ? Quel est le nombre moyen de clients présents dans le système en régime stationnaire ?

c) On note $p_2(t)$ la probabilité pour que les deux serveurs soient occupés au temps $t > 0$. Montrer que p_2 est solution du problème différentiel

$$\begin{cases} p_2'' = & -5p_2' - 5p_2 + 1 \\ p_2(0) = & p_2'(0) = 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression de $p_2(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 59. Temps passé dans la file M/M/1. Des clients se présentent à un serveur indépendamment les uns des autres. Nous supposons que les durées séparant deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $\lambda < 1$. Les clients sont servis par ordre d'arrivée, puis sortent du système. Les durées de services sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1. Soit N_t le nombre de clients présents dans le système au temps t.

1) Soit $h > 0$ et $n \geq 1$. Démontrer que

$$\mathrm{P}(N_{t+h} = n+1 \,|\, N_t = n) = \lambda h + o(h),$$

et

$$\mathrm{P}(N_{t+h} = n-1 \,|\, N_t = n) = h + o(h).$$

2) Montrer que (N_t) est un processus de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{N}$. Décrire le générateur aléatoire de ce processus.

3) Démontrer que le processus (N_t) admet une mesure de probabilité invariante π unique telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \pi_i = K\lambda^i, \quad K > 0.$$

Déduire la valeur de K.

On suppose désormais et dans le reste du problème que le système est à l'équilibre, c'est à dire $P(N_0 = i) = \pi_i$, et on s'intéresse au temps total T que passe un client dans le système.

4) Soit S_{i+1} une variable aléatoire de loi Gamma $G(i+1,1)$. À l'aide d'un argument de conditionnement, démontrer que

$$\mathrm{P}(T \leq t) = K \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \, \mathrm{P}(S_{i+1} \leq t).$$

5) En introduisant la loi de Poisson, démontrer que

$$\mathrm{P}(S_{i+1} \leq t) = e^{-t} \sum_{j>i} \frac{t^j}{j!}.$$

6) En déduire la loi de T et le temps moyen passé par un client dans le système.

Exercice 60. Un système est constitué de n serveurs indépendants. Chaque serveur est susceptible d'être libre (état 0) ou occupé (état 1). La durée d'un service est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Lorsque le serveur est libre, il le reste pendant une durée de loi exponentielle de paramètre 1. Toutes les durées sont indépendantes.

1) On suppose que $n = 1$ et qu'au temps $t = 0$, le serveur est libre.
Déterminer la probabilité pour que le serveur soit occupé au temps $t > 0$. Soit T une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, indépendante du système. Déduire du calcul précédent la probabilité pour que le serveur soit occupé au temps T.

2) On suppose désormais que $n > 1$. Soit N_t le nombre de serveurs occupés au temps $t > 0$.
   a) Soit i un entier strictement positif et $X_1, \ldots, X_i$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable
   $$Y_i = \min_{1 \leq \ell \leq i} X_\ell.$$
   b) Montrer que (N_t) est un processus de Markov homogène de taux de transition
   $$\begin{cases} \lambda_{i,i+1} = n - i & \text{si } 0 \leq i < n \\ \lambda_{i,i-1} = i\mu & \text{si } 0 < i \leq n \\ \lambda_{i,j} = 0 & \text{si } j \neq i-1, i, i+1. \end{cases}$$
   Donner le générateur infinitésimal Λ de ce processus ainsi que son graphe de transition.

3) On pose $\rho = 1/\mu$. Montrer que le processus converge en loi vers une unique loi invariante π telle que
$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \pi_i = C_n^i \, \rho^i \pi_0.$$
Reconnaître dans la loi invariante une loi connue.

4) On suppose que $n = 30$ et $\mu = 2$. À l'aide du théorème central limite, donner une valeur approchée de la probabilité pour que, en régime stationnaire, au moins 80% des serveurs soient libres.

5) On considère à nouveau la variable T de la question 1). Calculer le nombre moyen de clients dans le système au temps T sachant que $N_0 = 0$.

Exercice 61. File d'attente M/G/∞ - Un modèle de migration.

Des oiseaux migrateurs arrivent dans une zone A selon un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et y séjournent un temps aléatoire de fonction de répartition G avant de repartir. On note X_t le nombre d'oiseaux repartis de la zone au temps $t > 0$ et Y_t le nombre d'oiseaux encore présents dans la zone au temps t ($X_t + Y_t = N_t$).

a) Soit $0 < s \leq t$. Quelle est la probabilité $p(s)$ pour qu'un oiseau arrivé au temps s soit parti au temps t ?
b) Montrer que X_t et Y_t sont des variables de loi de Poisson dont on déterminera les moyennes respectives.
c) Soit $s, t > 0$. Calculer les probabilités associées aux occurrences (arrivées d'oiseau) de types suivants
   – type 1 : un oiseau arrive avant t et repart entre t et $t + s$:
   – type 2 : un oiseau arrive avant t et repart après $t + s$;
   – type 3 : un oiseau arrive entre t et $t + s$ et repart après $t + s$;
   – type 4 : tous les autres cas de figure.
d) Soit $N^i = N^i_{t+s}$ le nombre d'occurrences de type $i = 1, 2, 3, 4$ au temps $t+s$. Quelle est la loi de N^i, $i = 1, 2, 3, 4$.
   Vérifier que
   $$Y_t = N_1 + N_2$$
   et
   $$Y_{t+s} = N_2 + N_3 \ .$$
   Calculer $Cov[Y_t, Y_{t+s}]$.

Exercice 62. À propos de la file M/M/1. Partie 1. Un système est constitué d'une file d'attente de type M/M/1. Le processus d'arrivée des clients dans le système est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les durées de services sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On note X_t le nombre de clients dans le système au temps $t \geq 0$. On considère le premier instant pour lequel ce nombre est égal à $n \geq 1$:

$$T_n = \inf\{t \geq 0 \ ; \ X_t = n\} \ .$$

Pour tout $m \leq n - 1$, on note $F_{m,n}$ la fonction de répartition de la loi conditionnelle de la variable T_n sachant $X_0 = m$

$$\forall t \geq 0 \ , \quad F_{m,n}(t) = \mathrm{P}(T_n \leq t \mid X_0 = m)$$

et $f_{m,n}$ la densité de probabilité associée.

1) Déterminer $F_{0,1}$ et $f_{0,1}$.

2) On suppose que $n \geq 2$ et $m \leq n-2$. Montrer que

$$\forall t \geq 0\ , \quad F_{m,n}(t) = \int_0^t F_{m+1,n}(t-x) dF_{m,m+1}(x)\ .$$

3) On note $\varphi_{m,n}$ la transformée de Laplace de la fonction $f_{m,n}$. Montrer que

$$\forall s > 0\ ,\ n \geq 2\ , \quad \varphi_{0,n}(s) = \varphi_{0,1}(s)\,\varphi_{1,2}(s) \ldots \varphi_{n-1,n}(s)\ .$$

4) Soit ζ_m la durée de séjour dans l'état m, $1 \leq m \leq n-1$.
  a) Quelle est la loi de ζ_m ?
  b) Montrer que

$$\forall t \geq 0\ , \quad F_{m,m+1}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{P}(\zeta_m \leq t) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^t F_{m-1,m+1}(t-x)(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}dx\ .$$

  c) A l'aide des questions 2 et 4b), montrer que

$$\forall s > 0\ , \quad \varphi_{m,m+1}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda+\mu(1-\varphi_{m-1,m}(s))}\ .$$

  d) Calculer $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,3}$ et $\varphi_{0,3}$.
  e) Vérifier que

$$E[T_3 \mid X_0 = 0] = \frac{3}{\lambda} + \frac{2\mu}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^3}\ .$$

5) Soit $n \geq 2$. On note $\rho = \mu/\lambda$.
  a) Montrer que

$$E[T_n \mid X_0 = n-1] = \frac{1}{\lambda}(1 + \mu E[T_{n-1} \mid X_0 = n-2])\ .$$

  b) En déduire que

$$E[T_n \mid X_0 = n-1] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho^i}{\mu}\ .$$

  c) Montrer que

$$E[T_n \mid X_0 = 0] = \sum_{i=1}^{n} E[T_i \mid X_0 = i-1]\ .$$

  d) En déduire la valeur de $E[T_n \mid X_0 = 0]$ pour $\rho \neq 1$. Quelle est la valeur de cette espérance pour $\rho = 1$? Commenter ces différents résultats en fonction des valeurs de ρ.

Exercice 63. À propos de la file M/M/1. Partie 2.

On suppose maintenant que la capacité de la file d'attente est limitée. Le nombre de clients dans le système (en service ou en attente) ne peut excéder $K = 3$. Un client qui trouve le système saturé à son arrivée est définitivement rejeté. On note Z_t le nombre de clients dans le système au temps $t \geq 0$. On suppose que $Z_0 = 0$.

1) Écrire les équations de Kolmogorov associées au processus de Markov $\{Z_t \,;\, t \geq 0\}$. Décrire la loi stationnaire de ce processus.
2) En régime stationnaire, quel est le nombre moyen de clients rejetés par unité de temps ?
3) Lorsque le système atteint l'état de saturation, il est instantanément réinitialisé à zéro. Tous les clients sont ainsi perdus. Cette réinitialisation engendre un coût aléatoire Y_i d'espérance finie égale à γ. On suppose que les variables Y_i sont indépendantes. Déterminer la valeur de la limite

$$c = \lim_{t \to \infty} \frac{E[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i]}{t} \,,$$

N_t désigne le nombre de fois où le système atteint l'état de saturation dans l'intervalle de temps $(0, t)$.

Exercice 64. Des clients arrivent à un serveur selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On considère que le système bloque instantanément lorsque n clients se trouvent dans le système ($n \geq 1$). Lors d'un blocage, tous les clients présents sont perdus, et la durée de remise en fonction du système est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$. On modélise l'état de cette file d'attente au temps $t \geq 0$ à l'aide d'une variable aléatoire X_t à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1, B\}$. Les valeurs entières correspondent au nombre de clients dans le système et le symbole B à l'état de blocage.

1) Soit $h > 0$ et $i = 0, \ldots, n-2$. Montrer que $\mathrm{P}(X_h = i+1 \mid X_0 = i) = h + o(h)$ et que $\mathrm{P}(X_h = B \mid X_0 = n-1) = h + o(h)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, montrer que $\mathrm{P}(X_h = i-1 \mid X_0 = i) = \mu h + o(h)$.
2) Justifier que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov. Donner son générateur infinitésimal et son graphe de transition.
3) On considère la loi de probabilité π définie sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1, B\}$ de la manière suivante. Pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$\pi_{n-k} = \beta \pi_B \sum_{i=0}^{k-1} \mu^i \,.$$

Montrer que la loi π est invariante pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$. Montrer que

$$\pi_B = \frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)^2 + \beta\,(n(1-\mu) - \mu(1-\mu^n))} \,.$$

La variable X_t converge-t-elle en loi lorsque t tend vers l'infini ?
4) On suppose que $n = 3$, $\mu = 2$ et $\beta = 0.5$. Combien de clients en moyenne sont présents dans le système en régime stationnaire ?
5) On suppose que $n = 2$ et que le système ne comporte aucun client à l'instant initial. On considère la variable aléatoire T égale à l'instant de premier blocage,

ainsi que sa fonction répartition notée F. Montrer que F est solution de l'équation differentielle

$$F'' + (2+\mu)F' + F = 1 \ .$$

(On pourra utiliser les equations de Kolmogorov associées au processus correspondant à $\beta = 0$). Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 65. Des clients arrivent à un serveur selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et sont servis selon des durées de loi exponentielle de paramètre μ. Le serveur est susceptible d'être en état de blocage pour une raison indépendante des arrivées de clients (panne du serveur, par exemple). La transition vers un état de blocage s'effectue avec un taux égal à α et les durées de blocage sont de loi exponentielle de paramètre β. A chaque service est associé un gain positif aléatoire X, de loi exponentielle de moyenne γ. A chaque blocage est associée une perte Y égale à π fois la durée de blocage. De plus, lors d'un blocage, tous les clients de la file d'attente sont perdus.

Afin d'augmenter le profit réalisé, on décide d'installer un second serveur. Le rôle du second serveur est de relayer le premier en cas de blocage. On dira que le potentiel de relais de ce serveur est p s'il peut couvrir la proportion p des blocages. L'installation du serveur de relais a un coût qui est fonction de son potentiel de relais

$$C(p) = Kp^2 \ .$$

L'objectif de ce (gros) exercice est de déterminer la valeur de p qui maximise le profit réalisé en moyenne sur une période fixée de longueur T. Il comporte une partie théorique dans laquelle on essayera de déterminer une approximation convenable du profit moyen à l'aide des outils standards du cours (formule de Wald, processus de Poisson composés, renouvellement, etc). Il comportera une partie pratique où l'on simulera la variable de profit pour différentes valeurs de p. On suggère d'analyser les données produites par la simulation à l'aide des méthodes de régression linéaire.

Pour fixer les idées, on pourra choisir les différents paramètres de la manière suivante

λ	1.0
μ	1.5
α	0.5
β	1.0
γ	1.0
π	1.0
K	$4 - 40$
T	$10 - 100$

Exercice 66. On considère une file d'attente $M/M/1/k$ de taux d'arrivée égal à λ et de taux de service égal à μ. On note L^k la taille de la file en régime stationnaire.

a) Montrer que

$$\forall n \leq k \ , \quad \mathrm{P}(L^k = n) = \mathrm{P}(L^\infty = n \mid L_\infty \leq k) \ .$$

b) Calculer la longueur moyenne de la file d'attente en régime stationnaire. En déduire le temps moyen passé par un client dans le système en régime stationnaire.

Exercice 67. Une forme produit pour deux files d'attente en réseau.

Des clients en sortie d'une file $M/M/1$ sont dirigés vers un second serveur dont les durées de service sont de loi exponentielle de même paramètre que dans le premier serveur. On note X_t le nombre de clients présents dans le premier service au temps t et Y_t le nombre de clients présents dans le second. Montrer que le couple (X_t, Y_t) converge en loi et que asymptotiquement, les deux variables sont indépendantes. En déduire les lois marginales asymptotiques.

Chapitre 5

Mouvement brownien et diffusions

Le mouvement brownien est le plus célèbre des processus aléatoires. Il doit son appellation au biologiste anglais Brown qui le découvre en 1828 lors de l'observation du mouvement extrêmement désordonné des particules de pollen dans un fluide. La théorie mathématique a débuté en 1900-1905 (Bachelier, Enstein) et s'est poursuivie vers 1930 jusqu'à nos jours. Ce processus intervient maintenant dans de nombreux modèles de phénomènes naturels, physiques ou économiques.

5.1 Limite de marches aléatoires

5.1.1 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

Une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$ est une chaîne de Markov en temps discret qui visite des points aléatoirement dans cet ensemble en modifiant de la valeur +1 ou -1 une coordonnée du point courant. Afin de définir rigoureusement cette chaîne de Markov, considérons l'ensemble des directions de $\mathbb{Z}^d$. Cet ensemble est constitué des d vecteurs unitaires $e_1, \ldots, e_d$ et de leurs vecteurs opposés $-e_1, \ldots, -e_d$ ($2d$ directions au total). Soit

$$Y = {}^T(Y_1, \ldots, Y_d)$$

un vecteur aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble de ces directions

$$\forall i \leq d \, , \quad \mathrm{P}(Y = e_i) = \mathrm{P}(Y = -e_i) = \frac{1}{2d} \, .$$

Des calculs élémentaires montrent que, pour tout $k = 1, \ldots, d$,

$$\mathrm{P}(Y_k = 1) = \mathrm{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2d}$$

et

$$\mathrm{P}(Y_k = 0) = 1 - \frac{1}{d} \, .$$

En conséquence, le vecteur Y est d'espérance nulle

$$E[Y] = 0$$

et de matrice de covariance diagonale (homothétique)

$$K_Y = \frac{1}{d}\, I$$

où I est la matrice identité de dimension $d \times d$. Considérons une suite (Y_n) de vecteurs aléatoires indépendants de même loi que Y. La suite définie par

$$\forall n \geq 1 \;, \quad X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$$

est appelée *marche aléatoire* dans $\mathbb{Z}^d$.

Propriétes des marches aléatoires Certaines propriétés de la suite (X_n) découlent immédiatement de sa définition. En particulier,

a) le processus à temps discret $\{X_n,\ n \geq 1\}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet, les accroissements sont définis de la manière suivante

$$\forall n, k \geq 1 \;, \quad X_{n,k} = X_{n+k} - X_n = Y_{n+1} + \ldots + Y_{n+k} \;.$$

Par l'indépendance des variables de la suite (Y_n), les accroissements distincts et disjoints sont nécessairement indépendants.

b) Le processus à temps discret $\{X_n,\ n \geq 1\}$ est une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $\mathbb{Z}^d$. Les probabilités de transition d'une telle chaîne sont données par les relations suivantes

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}^d \;, \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } \|i-j\| = 1 \\ 0 & \text{si } \|i-j\| \neq 1 \;. \end{cases}$$

c) L'espérance et la matrice de covariance de la variable Y_n se calculent facilement. Nous avons

$$\forall n \geq 1 \;, \quad E[X_n] = \sum_{k=1}^{n} E[Y_k] = 0$$

et

$$\forall n \geq 1 \;, \quad K_{X_n} = n K_{Y_1} = \frac{n}{d} I$$

Notons finalement que la valeur quadratique moyenne d'une marche aléatoire est toujours égale à

$$E[||X_n||^2] = \sum_{k=1}^{n} E[\|Y_k\|^2] = n \;.$$

Propriété de récurrence. On dit qu'un état d'une chaîne de Markov à temps discret est récurrent si la chaîne y revient presque-sûrement au bout d'un nombre fini d'étapes. Considérons une matrice de transition P définie sur un ensemble d'états E dénombrable. Deux états i et j sont équivalents si

$$\exists m, n \geq 1\,; \quad p_{ij}^m > 0 \quad \text{et} \quad p_{ji}^n > 0\,.$$

Pour cette relation, la récurrence est une propriété de classe. Si deux états i et j sont dans la même classe d'équivalence alors i est récurrent si et seulement si j l'est. Le résultat suivant nous servira par la suite à caractériser la propriété de récurrence.

Proposition 5.1.1 *Soit P une matrice de transition définie sur un ensemble d'états E dénombrable. Alors, $i \in E$ est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = +\infty\,.$$

Commentaires. Nous pouvons considérer que la propriété décrite ci-dessus est une définition de la récurrence de l'état i. Pour l'interpréter, notons que la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) < \infty$$

implique que les événements $(X_n = i)$ se produisent p.s en nombre fini, d'après le lemme de Borel-Cantelli. De plus, pour compter le nombre de retours en i, nous posons

$$N_i = \sum_{n=1} \mathbb{1}_{(X_n = i)}.$$

Conditionnellement au départ en i, la condition énonce simplement que le nombre moyen de retours est infini

$$E[N_i \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty.$$

■

Nous appliquons maintenant ce résultat à l'étude des marches aléatoires sur $E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Z}^2$ et $E = \mathbb{Z}^3$. Dans les trois cas, les chaînes de Markov sont irréductibles. Il suffit donc d'étudier la récurrence de l'état $i = 0$.

Exemple 5.1.1 *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$.*

Solution. La marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ est définie de la manière suivante. Soit $0 < p < 1$ et $q = (1 - p)$, alors

$$\mathrm{P}(Y = +1) = p$$

et

$$\mathrm{P}(Y = -1) = q \ .$$

La probabilité d'être en 0 à l'étape $2n$ est donnée par

$$p_{00}^{2n} = C_{2n}^{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

À l'étape $(2n+1)$, nous avons

$$p_{00}^{2n+1} = 0 \ .$$

La formule de Stirling

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

implique que

$$p_{00}^{2n} \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}} \ .$$

Comme $pq \leq 1/4$, la série diverge ssi $p = q = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, 0 est récurrent. Dans le cas contraire, on dit que 0 est *transient*. ■

Exemple 5.1.2 *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.*

Solution. On se déplace dans chacune des 4 directions avec une probabilité égale à 1/4. Dans ce cas, la probabilité d'être en 0 à l'étape $2n$ est donnée par

$$p_{00}^{2n} = \sum_{k+l=n} \frac{(2n)!}{k!k!l!l!} \frac{1}{4^(2n)}$$

En utilisant, la relation

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n \ ,$$

nous avons

$$p_{00}^{2n} \sim \frac{1}{4^(2n)} (C_{2n}^n)^2$$

Nous avons, grâce à la formule de Stirling,

$$p_{00}^{2n} \sim \frac{1}{n\pi} \ .$$

Il s'agit du terme général d'une série divergente. Donc 0 est récurrent. ■

Exemple 5.1.3 *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^3$.*

Solution. On se déplace dans chacune des 6 directions avec une probabilité égale à 1/6. Dans ce cas, on démontre que

$$p_{00}^{2n} \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{3/2}n^{3/2}} \ .$$

Il s'agit cette fois du terme général d'une série convergente. la probabilité de retour en zéro est une constante célèbre en probabilité appelée *constante de Polya*. Elle est égale à

$$p(3) = 1 - \frac{1}{u_3} = 0.340537\cdots$$

Précisément, on peut montrer que

$$u_3 = \frac{\sqrt{6}}{32\pi^3}\Gamma(\frac{1}{24})\Gamma(\frac{5}{24})\Gamma(\frac{7}{24})\Gamma(\frac{11}{24}).$$

Donc, tous les états sont transients. La marche se comporte donc sensiblement différemment en dimension 3. ∎

5.1.2 Le mouvement brownien standard

De la même manière que les marches aléatoires, le mouvement brownien modélise un mouvement désordonné et sans orientation privilégiée. Toutefois, les marches aléatoires sont des processus aléatoires dont le temps et l'espace sont discrets. Pour le mouvement brownien, le temps et l'espace seront des dimensions continues. Nous allons dans ce paragraphe décrire le mouvement brownien comme la limite de suite de marches aléatoires. Pour rendre continus à la fois le temps et les distances parcourues, un élément de temps Δt et un élément de distance Δx sont introduits. Le *mouvement brownien standard* est obtenu comme limite, quand Δt et Δx tendent vers zero, de marches aléatoires où les pas de longueur Δx se succèdent à des intervalles de durée Δt. Pour Δt et Δx fixes, on pose

$$\forall t \geq 0, \quad X_t^* = \Delta x X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor}$$

ou $\lfloor r \rfloor$ désigne la partie entière du réel r.

Commentaires. Le processus $\{X_t^*, \ t \geq 0\}$ est une marche aléatoire dont les transitions se succèdent tous les intervalles de temps Δt et dont les accroissements sont de longueur Δx.

Les propriétes suivantes s'obtiennent immédiatement.

– L'espérance de X_t^* est égale à

$$E[X_t^*] = \Delta x E[X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor}] = 0 \ .$$

– La matrice de covariance de X_t^* est égale à

$$K_{X_t^*} = (\Delta x)^2 K_{X_{\lfloor t/\Delta t \rfloor}} = (\Delta x)^2 \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor \frac{1}{d} I \ .$$

– La valeur quadratique moyenne de X_t^* est

$$E[\|X_t^*\|^2] = (\Delta x)^2 \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor \, .$$

Notre objectif est de faire tendre à la fois Δx et Δt vers 0. Pour assurer l'existence d'une limite, nous souhaitons que la norme quadratique moyenne reste finie. Pour cela, nous imposons

$$\Delta t = \frac{1}{n}$$

et

$$\Delta x = \sqrt{\frac{d}{n}} \, ,$$

où n est un entier positif. Le processus correspondant est noté $\{X_t^{(n)}, t \geq 0\}$. Voici maintenant la définition du mouvement brownien standard.

Définition 5.1.1 *Un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé mouvement brownien standard si*

i) pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ sont indépendantes (accroissements indépendants).

ii) Pour tout $i \geq 1$, l'accroissement $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ admet pour loi la loi gaussienne dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne nulle et de matrice de covariance $(t_i - t_{i-1})\, I$.

Rappelons que la convergence en loi d'un processus aléatoire est équivalente à la convergence en loi de tous les vecteurs de dimension finie extraits de ce processus.

Théorème 5.1.1 *Lorsque $n \to \infty$, le processus $\{X_t^{(n)}, t \geq 0\}$ converge en loi vers un mouvement brownien standard.*

Démonstration. Nous donnons l'idée de la démonstration en dimension 1. Le processus aléatoire $\{X_t^{(n)},\ t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants puisqu'il s'agit d'un marche aléatoire. Il en est de même quand $n \to \infty$, pour le processus $\{X_t,\ t \geq 0\}$. Soit maintenant $s < t$. Nous souhaitons montrer que les accroissements sont de loi gaussienne. Alors,

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} - X_s^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{\lfloor nt \rfloor} - X_{\lfloor ns \rfloor}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_{\lfloor ns+1 \rfloor} + \cdots + Y_{\lfloor nt \rfloor}) \\ &= \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}}(Y_{\lfloor ns+1 \rfloor} + \cdots + Y_{\lfloor nt \rfloor}) \, . \end{aligned}$$

Clairement, nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}}{\sqrt{n}} = \sqrt{(t-s)}$$

et, d'après le théorème central limite, la variable

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}} (Y_{\lfloor ns+1 \rfloor} + \cdots + Y_{\lfloor nt \rfloor})$$

converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. ■

Définition 5.1.2 *Un processus aléatoire $\{X_t,\ t \geq 0\}$ réel est un mouvement brownien standard à une dimension si*

- $X(0) = 0$ *;*
- $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus à accroissements indépendants ;*
- $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus à accroissements stationnaires : la loi de l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendante t pour tout $s, t \geq 0$.*
- *pour tous $t > 0$, X_t est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance t.*

Pour un tel processus, on peut en particulier remarquer que

$$\mathrm{P}(|X_t| \leq 1.96\sqrt{t}) \approx 0.95 \,.$$

Ceci signifie qu'avec une probabilité égale à 95 pour 100, le mouvement brownien au temps t se trouve à l'intérieur de la parabole

$$x^2 = (1.96)^2 t \,.$$

5.1.3 Continuité des trajectoires

Dire qu'un processus aléatoire $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est continu c'est, par définition, dire que

$$\lim_{h \to 0} X_{t+h} - X_t = 0 \,.$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte. La plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi. Elle est évidemment vérifiée. Nous allons démontrer une continuité en probabilité pour le mouvement brownien standard.

Proposition 5.1.2 *Soit $\epsilon > 0$ et $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard (dimension 1). On a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0 \,.$$

Démonstration. Soit $h > 0$. Par définition, l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ admet pour loi $\mathcal{N}(0,h)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\mathrm{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) &= \frac{2}{h} \int_\epsilon^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \\
&< 2 \int_\epsilon^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon x}{2h}} dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} \frac{2h}{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon^2}{2h}}
\end{aligned}$$

Le dernier terme converge vers 0 lorsque $h \to 0$. ■

Commentaires. On démontre aussi (de manière très technique) que
– presque toutes les trajectoires sont continues sur $\mathbb{R}_+$,
– presque toutes les trajectoires sont nulle part dérivables.

Pour terminer ce paragraphe, citons la loi du logarithme itéré qui précise le comportement asymptotique du mouvement brownien standard.

Proposition 5.1.3 *Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard (dimension 1). On a*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \ln\ln(t)}} = 1 \quad p.s.$$

5.1.4 Le mouvement brownien comme processus gaussien

Un processus aléatoire est dit *gaussien* si tous les vecteurs finidimensionnels extraits sont gaussiens. Précisons cette définition.

Définition 5.1.3 *Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un processus aléatoire réel. Il est gaussien si, pour tous $t_1, \ldots, t_n$ le vecteur aléatoire ${}^T(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$.*

La loi de probabilité d'un processus aléatoire gaussien est entièrement caractérisée par sa fonction moyenne

$$\forall t \in \mathbb{R}_+\ , \quad m(t) = E[X_t]$$

et par sa fonction de covariance

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+\ , \quad k(s,t) = Cov(X_s, X_t)\ .$$

Proposition 5.1.4 *Le mouvement brownien standard est un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+\ , \quad k(s,t) = \min(s,t)\ .$$

Démonstration. Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Les variables réelles $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et gaussiennes. Le vecteur aléatoire

$$Z = {}^T(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$$

se déduit par une transformation linéaire : il s'agit donc d'un vecteur gaussien. De plus, pour tout $s \leq t$, nous avons, par indépendance des accroissements,

$$E[X_s X_t] = E[X_s(X_t - X_s)] + E[X_s^2] = 0 + s = \min(s,t)\ .$$

■

Exercice 68. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$ et $\{N_t \ ; \ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de taux $\lambda = 1$, indépendant de la suite (Y_n). On considère

$$\forall t \geq 0, \quad X_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i.$$

Calculer la moyenne et la fonction covariance du processus $\{X_t, \ t \geq 0\}$. Conclusion.

5.1.5 Lois marginales et conditionnelles

Nous déterminons en premier lieu la densité conjointe du vecteur ${}^T(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Proposition 5.1.5 *Soit $\{X_t, \ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard et $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. La densité conjointe du vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est*

$$f_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})} \right)$$

(en posant $x_0 = t_0 = 0$).

Démonstration. Il suffit de noter que

$$f_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}(x_i - x_{i-1}) \ .$$

■

On peut en déduire par exemple pour $s < t$, la loi de probabilité conditionnelle de la variable X_s sachant que $X_t = x$.

Proposition 5.1.6 *La loi conditionnelle de la variable X_s sachant que $X_t = x$ est la loi normale $\mathcal{N}(\frac{s}{t}x, \frac{s(t-s)}{t})$.*

Démonstration. Le couple (X_s, X_t) est gaussien. Nous avons, d'après le cours de première année,

$$E[X_s \mid X_t = x] = \frac{Cov(X_s, X_t)}{Var(X_t)} x = \frac{sx}{t},$$

et

$$Var(X_s \mid X_t = x) = Var(X_s) - \frac{Cov(X_s, X_t)^2}{Var(X_t)} = s - \frac{s^2}{t}.$$

■

5.1.6 Temps de sortie et zéros des trajectoires

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au temps nécessaire à un mouvement brownien standard pour atteindre la valeur $a > 0$. Ce temps est défini de la manière suivante

$$T_a = \inf\{t > 0,\ X_t \geq a\} \ .$$

La variable T_a est un *temps d'arrêt* pour le processus (X_t). Nous ne donnerons pas de définition formelle des temps d'arrêt. Nous dirons simplement que τ est un temps d'arrêt si, pour tout t, l'événement $\tau \leq t$ peut être déterminé à partir des valeurs de X_s pour $s \leq t$.

Le processus (X_t) possède la *propriété de Markov*. Si $s > 0$, alors $X_{t+s} - X_s$ est un mouvement brownien indépendant de X_r, $r \leq s$. En d'autres termes, cela signifie que les accroissements futurs $(X_{t+s} - X_s)$ sont indépendants du passé du processus jusqu'au temps s[1]. Nous énonçons le résultat suivant dont la démonstration demande quelques sophistications.

Proposition 5.1.7 Propriété de Markov forte. *Si τ est un temps d'arrêt, alors $X_{t+\tau} - X_\tau$, $t \geq 0$, est un mouvement brownien indépendant de X_r, $r \leq \tau$.*

Démonstration. Admis. ∎

Afin d'illustrer l'importance de ce résultat. Montrons que $\{T_a,\ a \geq 0\}$, est un processus à accroissements stationnaires et indépendants. Cela signifie que

i) si $a < b$, la loi de $T_b - T_a$ est identique à celle de T_{b-a},

ii) si $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n$, les variables $T_{a_i} - T_{a_{i-1}}$ sont indépendantes.

Pour démontrer *i)*, prenons $\tau = T_a$ et notons que $X_\tau = a$. Nous voyons que $T_b - T_a$ est le temps d'atteinte de $b - a$ pour le processus $X_{t+\tau} - X_\tau$. Pour démontrer *ii)*, on procède par récurrence descendante.

Proposition 5.1.8 Loi de T_a. *Soit $a > 0$. La densité de la variable aléatoire T_a est*

$$\forall t \geq 0\ , \quad f_{T_a}(t) = a\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t} \ .$$

Démonstration. En conditionnant, on obtient que

$$\mathrm{P}(X_t \geq a) = \mathrm{P}(X_t \geq a \mid T_a \leq t)\mathrm{P}(T_a \leq t)$$

et par symétrie

$$\mathrm{P}(X_t \geq a \mid T_a \leq t) = \mathrm{P}(X_t \leq a \mid T_a \leq t) = \frac{1}{2} \ .$$

[1] La véritable formulation consiste à dire que pour toute suite $0 \leq r_1 < \ldots < r_n = s$, $(X_{t+s} - X_s)$ est un mouvement brownien indépendant du vecteur $(X_{r_1}, \ldots, X_{r_n})$

La fonction de répartition de la variable aléatoire T_a est donc

$$\forall t \geq 0 \; , \quad \mathrm{P}(T_a \leq t) = 2\mathrm{P}(X_t \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-x^2/2t} dx \; .$$

En posant $y = x/\sqrt{t}$, on obtient que

$$\mathrm{P}(T_a \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2/2} dx \; .$$

Le résultat se déduit par une simple dérivation. ■

Commentaires. La variable aléatoire T_a est presque-sûrement finie puisque

$$\mathrm{P}(T_a < \infty) = \lim_{t \to \infty} \mathrm{P}(T_a \leq t) = 1 \; .$$

Cela signifie que le mouvement brownien sort presque-sûrement de n'importe quel intervalle borné.

Proposition 5.1.9 *Soit $a > 0$. La variable T_a n'est pas intégrable*

$$E[T_a] = +\infty \; .$$

Démonstration. Puisque la variable T_a est positive, nous pouvons utiliser le fait que

$$E[T_a] = \int_0^\infty 1 - \mathrm{P}(T_a \leq t) dt \; .$$

D'après les calculs effectués précédemment, nous obtenons

$$E[T_a] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{a/\sqrt{t}} e^{-x^2/2} dx dt \; .$$

En inversant les signes d'intégration, nous avons

$$E[T_a] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{a/x^2} dt e^{-x^2/2} dx = \frac{2a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx \; .$$

et cette dernière intégrale est clairement divergente en zéro. ■

Nous appliquons maintenant le résultat précédent pour déterminer la probabilité pour que le mouvement brownien standard s'annule dans un intervalle de temps donné. Considérons par exemple l'intervalle (s, t), $s < t$, et l'événement

$$O(s,t) = \textit{ le mouvement brownien standard s'annule dans } \; (s,t) \; .$$

La probabilité de cet événement se calcule en conditionnant aux valeurs de la variable X_s

$$\mathrm{P}(O(s,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}(O(s,t) \mid X_s = x) e^{-x^2/2s} dx \; .$$

Par symétrie et continuité des trajectoires, on a

$$\mathrm{P}(O(s,t) \mid X_s = x) = \mathrm{P}(T_{|x|} \leq t - s)$$

et donc (exercice)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(O(s,t)) &= \frac{2}{\pi\sqrt{s(t-s)}} \int_0^\infty \int_{|x|}^\infty e^{-y^2/2(t-s)} dy e^{-x^2/2s} dx \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\frac{s}{t}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le triangle de pythagore et le fait que

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Exercice 69. Soit $a > 0$. Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq a) = \mathrm{P}(T_a \leq t) .$$

5.1.7 Intégrale stochastique

Il est possible de définir une notion d'intégrale d'une fonction le long de trajectoires d'un mouvement brownien. Cette notion est très utile lors des applications. Imaginons, par exemple, que le cours d'une valeur financière se modélise par un mouvement brownien $\{X_t,\ t \geq 0\}$. À l'instant t, une variation ΔX_t de ce cours est susceptible d'entraîner la variation d'une autre valeur (disons) Y_t selon la relation de proportionalité

$$\Delta Y_t = f(t)\Delta X_t .$$

Dans cette situation, le coefficient de proportionnalité est fonction du temps. Pour connaître la valeur de Y_t, il faudra alors *intégrer*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s) dX_s ,$$

en donnant, bien entendu, un sens à cette intégrale.

Définition 5.1.4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle (a,b), dérivable et de carré intégrable. On pose*

$$\int_a^b f(t) dX_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}]$$

où $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ est une subdivision de (a,b) telle que

$$\max_i (t_i - t_{i-1}) \to 0 \quad \textit{lorsque } n \to \infty .$$

Commentaires. On obtient ainsi une variable aléatoire réelle dépendant de f, appelée *intégrale stochastique* de f.

Proposition 5.1.10 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle (a, b), dérivable et de carré intégrable. On a*

$$\int_a^b f(t)dX_t = f(b)X_b - f(a)X_a - \int_a^b X_t f'(t)dt \ .$$

Démonstration. Il s'agit d'une "intégration par parties". Elle se justifie grâce à la formule suivante

$$\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}] = f(b)X_b - f(a)X_a - \sum_{i=1}^n X_{t_i}[f(t_i) - f(t_{i-1})] \ .$$

■

Proposition 5.1.11 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle (a, b), dérivable et de carré intégrable. L'intégrale stochastique est une variable aléatoire de loi normale de moyenne*

$$E\left[\int_a^b f(t)dX_t\right] = 0$$

et de variance

$$Var(\int_a^b f(t)dX_t) = \int_a^b f^2(t)dt \ .$$

Démonstration. L'intégrale stochastique est définie comme limite de combinaisons linéaires de variables gaussiennes indépendantes. Nous admettons le fait que sa loi est gaussienne. Par la formule d'intégration par parties, nous avons

$$E[\int_a^b f(t)dX_t] = f(b)E[X_b] - f(a)E[X_a] - \int_a^b E[X_t]f'(t)dt = 0 \ .$$

De plus, d'après l'indépendance des accroissements, nous avons

$$Var(\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})[X_{t_i} - X_{t_{i-1}}]) = \sum_{i=1}^n f^2(t_{i-1})Var(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \ .$$

En conséquent, nous avons

$$Var(\int_a^b f(t)dX_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f^2(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t)dt \ .$$

■

5.2 Applications du mouvement brownien

5.2.1 La primitive du mouvement brownien

Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. On pose

$$\forall t \geq 0\ , \quad Z_t = \int_0^t X_s ds.$$

Le processus $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ est appelé *primitive du mouvement brownien*. Il apparait par exemple de manière naturelle dans la situation suivante. On modèlise l'évolution du prix $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ d'une marchandise dans le temps, en supposant que les variations infinitésimales à chaque instant t sont proportionnelles au taux d'inflation instantané X_t, que l'on admet se comporter comme un mouvement brownien standard. C'est à dire que l'on a

$$dZ_t = X_t dt$$

avec $Z_0 = 0$, soit

$$\forall t \geq 0\ , \quad Z_t = \int_0^t X_s ds.$$

Nous allons montrer que $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ est un processus aléatoire gaussien et le caractériser en calculant sa moyenne et sa fonction de covariance.

Proposition 5.2.1 *Le processus $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ est un processus gaussien de moyenne*

$$\forall t \geq 0\ , \quad E[Z_t] = 0$$

et de covariance

$$\forall s \leq t\ , \quad k(s,t) = s^2(\frac{t}{2} - \frac{s}{6})\ .$$

Démonstration. La variable Z_t peut être exprimée grâce à l'intégrale stochastique

$$\forall t \geq 0\ , \quad Z_t = tX_t - \int_0^t s dX_s\ .$$

Par ailleurs, l'intégale stochastique est un processus gaussien (revenir à sa définition !). Il en est de même de la primitive du mouvement brownien. Pour calculer la moyenne, nous inversons les symboles espérance et intégrale

$$E[Z_t] = \int_0^s E[X_s]ds = 0\ .$$

Ceci est justifié par le fait que

$$E[\int_0^t |X_s|ds] = \int_0^t E[|X_s|]ds < \infty$$

(X_s suit la loi $\mathcal{N}(0,s)$). De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$E\left[\int_0^s \int_0^t |X_u X_v| du dv\right] = \int_0^s \int_0^t E[|X_u X_v|] du dv < \int_0^s \int_0^t \sqrt{uv} du dv < \infty$$

et l'on peut intervertir les sommations dans le calcul de la covariance. Pour tout $s \leq t$, nous avons

$$\begin{aligned} k(s,t) &= \int_0^s \int_0^t E[X_u X_v] du dv \\ &= \int_0^s \int_0^t \min(u,v) du dv \\ &= \int_0^s \left(\int_0^u v dv + u \int_u^t dv\right) du \\ &= s^2 (\frac{t}{2} - \frac{s}{6}) \end{aligned}$$

■

Remarquons, dans l'exemple du prix de la marchandise, que l'on peut donner une prévision de ce prix connaissant sa valeur à un instant donné. Il s'agit pour cela de déterminer, pour $0 \leq s \leq t$, le prix moyen de la marchandise à l'instant t sachant qu'il est de z à l'instant s. L'espérance conditionnelle se calcule aisement

$$\begin{aligned} E[Z_t \mid Z_s = z] &= E[Z_t - Z_s \mid Z_s = z] + E[Z_s \mid Z_s = z] \\ &= E[Z_t - Z_s] + z \\ &= z\ . \end{aligned}$$

Commentaires. On a utilisé ici l'indépendance des accroissements de la primitive du mouvement brownien. On montre par le calcul précédent que la meilleure prédiction que l'on peut faire du prix de la marchandise connaissant sa valeur à un temps donné est cette valeur même.

5.2.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ peut représenter par exemple la vitesse d'une particule dans un milieu visqueux, soumise à des variations désordonnées dues aux chocs des molécules. Pour le définir, il faut introduire deux coefficients. Le premier coefficient $\beta > 0$ est un coefficient de milieu (viscosité) qui décrit la difficulté du déplacement. Le second coefficient σ^2 décrit la variance due aux chocs. Le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ vérifie l'équation "différentielle" suivante

$$dY_t = -\beta Y_t dt + \sigma dX_t$$

où $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est une mouvement brownien standard. En multipliant par $e^{\beta t}$ les deux membres de cette équation, on obtient

$$e^{\beta t}(dY_t + \beta Y_t dt) = \sigma dX_t e^{\beta t}$$

soit

$$d[e^{\beta t}Y_t] = \sigma dX_t e^{\beta t} .$$

Cette équation est équivalente à

$$Y_t = Y_0 e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dX_s$$

ce qui constitue la véritable définition du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

5.2.3 Le pont brownien

On appelle *pont brownien standard* sur $[0,1]$, le processus du mouvement brownien standard $\{X_t,\ t \geq 0\}$ conditionné par $X_1 = 0$. Il s'agit d'un processus aléatoire gaussien puisque la loi de probabilité de tout vecteur ${}^T(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ conditionnelle à $X_1 = 0$ est encore gaussienne. Il suffit, pour caractériser le pont brownien de calculer l'espérance conditionnelle

$$\forall 0 \leq t \leq 1 , \quad m(t) = E[X_t \mid X_1 = 0]$$

et la covariance conditionnelle

$$\forall 0 \leq s,t \leq 1 , \quad k(s,t) = Cov(X_s X_t \mid X_1 = 0) .$$

La moyenne à déjà été calculée lors de la proposition 5.1.6. Nous avons

$$\forall 0 \leq t \leq 1 , \quad E[X_t \mid X_1 = 0] = 0 .$$

De plus, pour tout $s < t \in (0,1)$, nous avons

$$E[X_s X_t \mid X_1 = 0] = E[E[X_s X_t \mid X_t \, ; X_1 = 0] \mid X_1 = 0] .$$

Or, le triplet (X_s, X_t, X_1) est gaussien, et d'après les résultats de conditionnement pour les vecteurs gaussiens, nous avons

$$E[X_s \mid X_t = x \, ; X_1 = 0] = (k(s,t), k(s,1)) K^{-1} \, {}^T(x,0)$$

où K est la matrice de covariance de du vecteur (X_t, X_1). Un calcul rapide montre que

$$E[X_s \mid X_t = x \, ; X_1 = 0] = \frac{1}{(t-t^2)} (s - st, 0) \, {}^T(x,0) = \frac{s}{t} x .$$

Ainsi, nous avons

$$k(s,t) = \frac{s}{t} E[X_t^2 \mid X_1 = 0] = s - st.$$

Exercice 70. Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien. Montrer que le processus $\{Z_t; 0 \leq t \leq 1\}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par

$$Z_t = X_t - tX_1 ,$$

est un processus gaussien. Le caractériser.

Exercice 71. Soit $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ un pont brownien. Démontrer que le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \ , \quad Y_t = (t+1) Z_{t/(t+1)}$$

est un mouvement brownien standard.

5.2.4 Mouvement brownien avec dérive

Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownient standard. Nous appelons *mouvement brownien avec dérive* le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \ , \quad Y_t = \mu t + X_t$$

où μ est une constante réelle. Grâce aux propriétés du mouvement brownien, nous avons immédiatement

i) $Y_0 = 0$.

ii) Le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

iii) La variable Y_t admet pour loi la loi $\mathcal{N}(\mu t, t)$.

Le mouvement brownien avec dérive est caractérisé par les propriétés ci-dessus. Il s'agit aussi du processus gaussien de moyenne

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = \mu t,$$

et de covariance

$$\forall s, t \geq 0, \quad k(s,t) = \min(s,t).$$

Le processus se comporte comme un mouvement brownien mais avec une tendance, positive ou négative selon la valeur du coefficient μ. Ce processus modélise par exemple l'évolution d'un capital financier dont la valeur fluctue autour d'une moyenne croissante. Dans cette situation, il est très important de résoudre des problèmes liés au temps d'atteinte d'une barrière fixe. Notons $x > 0$ le capital de départ et disons que x est compris entre les valeurs a et b. Nous souhaitons calculer la probabilité $p(x)$ pour que le processus (le capital) atteigne la valeur élevée b avant la valeur basse a. Soit $\mu > 0$ et

$$\forall t \geq 0 \ , \quad Z_t = x + \mu t + X_t \ .$$

Soit $h > 0$ et $Y_h = Z_h - Z_0$.

Lemme 5.2.1 *La probabilité que le processus $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ sorte d'un intervalle borné (a,b) est de l'ordre de $o(h)$.*

Démonstration. Montrons cette propriété pour le temps d'atteinte T_c^Y d'une valeur quelconque $c > 0$. L'événement $(T_c^Y \leq h)$ est réalisé ssi il existe $t \in (0, h]$ tel que $X_t = c - \mu t$. Dans ce cas, nous avons alors $X_t \geq c - \mu h$ et

$$\mathrm{P}(T_c^Y \leq h) \leq \mathrm{P}(T_{c-\mu h} \leq h).$$

D'après le résultat concernant les temps d'atteinte du mouvement brownien, nous avons

$$\mathrm{P}(T_{c-\mu h} \leq h) \leq \mathrm{P}(|X_1| \geq \frac{c - \mu h}{\sqrt{h}}) \leq \frac{E[X^4]h^2}{(c - \mu h)^4}$$

où X_1 est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. La dernière ingalité provient de l'inégalité de Markov appliquée à l'ordre $r = 4$. ■

Un conditionnement considérant les cas où le processus sort ou non de l'intervalle (a, b) conduit aux équations suivantes

$$\begin{aligned} p(x) &= E[\mathrm{P}(\text{ Le processus atteint } b \text{ avant } a \ | Y_h)] + o(h) \\ &= E[p(x + Y_h)] + o(h) \ . \end{aligned}$$

Dans ces équations, $o(h)$ représente la probabilité pour que le processus atteigne a ou b dans l'intervalle de temps de longueur h. Un développement en série donne

$$p(x) = E\left[p(x) + p'(x)Y_h + p''(x)\frac{Y_h^2}{2} + \ldots\right] + o(h)$$

soit

$$p(x) = p(x) + p'(x)E[Y_h] + p''(x)E[\frac{Y_h^2}{2}] + \ldots + o(h) \ .$$

Finalement, la variable Y_h est une variable de loi normale de moyenne μh et de variance h. Après simplification, nous avons donc

$$p'(x)\mu + \frac{p''(x)}{2} = \frac{o(h)}{h} \ .$$

Puisque h peut être arbitrairement petit, p est solution de l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$p'' + 2\mu p' = 0$$

et vérifie les “conditions de bord”

$$p(b) = 1 \quad ; \quad p(a) = 0 \ .$$

La solution de ce problème est classique :

$$\forall x \in (a, b) \ , \quad p(x) = \frac{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu x}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \ .$$

Commentaires. Si $\mu < 0$, en laissant a tendre vers l'infini, on obtient la probabilité pour que le processus atteigne b. Cette probabilité est égale à

$$p_b = e^{-2\mu b} \ .$$

Proposition 5.2.2 *Soit $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ le mouvement brownien avec dérive positive μ. Alors,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\max_{0\leq s\leq t} Y_s]}{t} = \mu \qquad p.s.$$

Démonstration. Soit $T_0 = 0$ et pour tout $n > 0$, notons T_n le temps d'atteinte de la valeur n. Comme le processus est à accroissements indépendants, les variables $T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et de même loi. La suite (T_n) forme donc un processus de renouvellement de processus de comptage $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$. De plus, nous savons que

$$E[N_t] \leq E[\max_{0\leq s\leq t} Y_s] \leq E[N_t + 1]$$

et

$$E[T_1] = \frac{1}{\mu}\,.$$

D'après les résultats concernant les processus de renouvellement

$$\frac{E[N_t]}{t} \to \frac{1}{E[T_1]} = \mu \qquad \text{p.s.}$$

■

Exercice 72. Soit $\mu > 0$. La suite (Y_n) converge presque-sûrement vers $+\infty$.

Solution. Nous utilisons le lemme de Borel-Cantelli. Soit $A > 0$, nous avons

$$\mathrm{P}(\mu n + X_n < A) = \int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-(x-\mu n)^2/2n} dx$$

En développant le carré, nous obtenons

$$\mathrm{P}(\mu n + X_n < A) \leq e^{-\mu^2 n/2} e^{\mu A} \int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2n} dx \leq e^{-\mu^2 n/2} e^{\mu A}$$

La série converge (série géométrique). La variable Y_n converge donc ps vers ∞. ■

Nous terminons ce paragraphe en présentant la loi du temps d'atteinte de la valeur a par un mouvement brownien avec dérive. Nous supposons que le coefficient de dérive μ est strictement positif. Soit

$$T_a = \inf\{t \geq 0\ ,\ Y_t = a\}$$

et

$$\forall s > 0\ , \quad L_{T_a}(s) = E[e^{-sT_a}]$$

sa transformée de Laplace. Pour tout $a, b > 0$, on remarque que

$$L_{T_{a+b}}(s) = E[e^{-sT_{a+b}}] = E[e^{-s(T_a + T_{a+b} - T_a)}]\ .$$

Comme T_a et $T_{a+b} - T_a$ sont indépendantes, on a

$$L_{T_{a+b}}(s) = E[e^{-sT_a}]E[e^{-s(T_{a+b}-T_a)}] .$$

et par stationarité des accroissements

$$L_{T_{a+b}}(s) = L_{T_a}(s)L_{T_b}(s) .$$

Ceci implique que

$$\forall s > 0 , \quad L_{T_a}(s) = e^{-c(s)a}$$

où $c(s) > 0$ ne dépend pas de a.

Proposition 5.2.3 *La transformée de Laplace de la variable T_a est égale à*

$$\forall s > 0 , \quad L_{T_a}(s) = e^{-a(\sqrt{\mu^2+2s}-\mu)} .$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer $c(s)$. On conditionne par Y_h pour un h petit. Ceci entraine que

$$\begin{aligned} f(a) = L_{T_a}(s) &= E[e^{-s(h+T_{a-Y_h})}] + o(h) \\ &= e^{-sh}E[f(a-Y_h)] + o(h) . \end{aligned}$$

En utilisant un développement de Taylor :

$$f(a) = e^{-sh}E[f(a) - Y_h f'(a) + \frac{Y_h^2}{2}f''(a) + \ldots] + o(h)$$

soit

$$f(a) = f(a)(1-sh) - f'(a)\mu h + \frac{h}{2}f''(a) + o(h) .$$

Puisque h peut être choisi arbitrairement petit, f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$sf = -\mu f' + \frac{f''}{2} .$$

Remarquons maintenant que

$$f(a) = e^{-c(s)a} .$$

Nous obtenons alors

$$c^2(s) + 2\mu c(s) - 2s = 0,$$

et

$$c(s) = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2s} .$$

■

Commentaires. On peut déduire de cette proposition le temps moyen d'atteinte de la valeur a par un mouvement brownien avec dérive

$$E[T_a] = -L'_{T_a}(0) = \frac{a}{\mu} .$$

5.3 Martingales et temps d'atteinte

Dans cette section, nous présentons quelques résultats liés aux martingales. Cette classe de processus constitue un outil important dans l'étude des propriétés du mouvement brownien.

5.3.1 Martingale

Proposition 5.3.1 *Le mouvement brownien standard X_t est une martingale. C'est-à-dire, si $s < t$,*

$$E[X_t \mid X_r,\ r \leq s] = X_s.$$

Bien entendu, cette définition de martingale est un peu abusive quant aux notations utilisées. Comme pour les définitions de processus de Markov, il serait plus exact de dire que pour toute suite finie d'instants $0 \leq r_1 \ldots < r_n < s$, nous avons

$$E[X_t \mid X_s,\ X_{r_n}, \ldots, X_{r_1}] = X_s$$

Il faudra garder en mémoire que la notation $X_r,\ r \leq s$, signifie en fait $X_s, X_{r_n}, \ldots, X_{r_1}$ pour toute suite $0 \leq r_1 \ldots < r_n < s$.

Démonstration. Sachant $X_r,\ r \leq s$, X_s est connu et $X_t - X_s$ est independant de X_s et de moyenne nulle. Nous avons donc

$$E[X_t \mid X_r,\ r \leq s] = E[X_t - X_s + X_s \mid X_r,\ r \leq s] = X_s$$

■

Tous les calculs suivants portent sur les temps d'atteinte du mouvement brownien. Il repose sur le théorème suivant, que nous appelerons **Théorème d'arrêt optionnel**.

Théorème 5.3.1 *Soit (M_t) une martingale à trajectoires continues. Supposons que τ soit un temps d'arrêt tel que*

$$\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1.$$

Supposons de plus qu'il existe une constante K telle que $|M_{\tau \wedge t}| \leq K$, pour tout t. Alors

$$E[M_\tau] = E[M_0]$$

Exemple 5.3.1 Distribution de sortie de l'intervalle (a, b). *Soit $a < 0$ et $b > 0$. Considérons le temps de sortie de l'intervalle*

$$\tau = \inf\{t : X_t \notin (a, b)\}$$

Nous avons

$$\mathrm{P}(X_\tau = a) = \frac{b}{b-a} = 1 - \mathrm{P}(X_\tau = b)$$

Solution. Vérifions tout d'abord que τ est un temps d'arrêt. Nous avons

$$\overline{(\tau \leq s)} = (\tau > s) = (X_r \in (a,b),\, \forall r \leq s).$$

Clairement, ce dernier événement s'exprime à partir des valeurs du processus jusqu'au temps s. Pour vérifier la condition du théorème, notons que $\tau \leq T_a$. Nous avons montré auparavant que

$$\mathrm{P}(T_a < \infty) = 1.$$

Il est évident que

$$|X_{\tau \wedge t}| \leq |a| + b.$$

D'après le théorème d'arrêt optionnel, nous pouvons donc écrire

$$0 = E[X_\tau].$$

D'autre part, nous avons par définition de X_τ

$$E[X_\tau] = a\mathrm{P}(X_\tau = a) + b\mathrm{P}(X_\tau = b).$$

En annulant le membre de droite, nous prouvons le résultat énoncé. ■

5.3.2 Martingale exponentielle

D'autres martingales sont liées au mouvement brownien. Les considérer permet d'obtenir d'intéressants résultats. La martingale exponentielle ou *martingale de Wald* permet en particulier d'obtenir des résultats concernant les processus à accroissements indépendants ayant une dérive.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$M_t = \exp(\theta X_t - t\theta^2/2), \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 5.3.2 *(M_t) est une martingale par rapport au mouvement brownien, i.e., pour $s < t$,*

$$E[M_t \mid X_r,\ r \leq s] = M_s$$

Démonstration. Nous avons

$$\phi_t(\theta) = E[e^{\theta X_t}] = \exp(t\theta^2/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, par l'indépendance des accroissements, nous avons

$$E[M_t \mid X_r,\ r \leq s] = \frac{\exp(\theta X_s)}{E[e^{\theta X_t}]} E[e^{\theta(X_t - X_s)}].$$

On termine la démonstration en simplifiant le rapport des deux espérances. ■

Nous déduisons de ce résultat une manière rapide pour calculer la probabilité de ruine pour le mouvement brownien avec dérive. Soit

$$Y_t = \mu t + \sigma X_t$$

et

$$R_a = \inf\{t;\, Y_t \leq a\}.$$

Proposition 5.3.3 *Si $\mu > 0$ et $a < 0$, alors nous avons*

$$\mathrm{P}(R_a < \infty) = e^{2\mu a/\sigma^2}.$$

La preuve est similaire à celle donnée pour le modèle du risque. Nous en reprenons les principales étapes. En premier lieu, fixons le choix de θ, libre dans la martingale.

Idée de la démonstration. Supposons $R_a < \infty$. En arrêtant la martingale M_t au temps R_a, nous avons

$$X_{R_a} = (a - \mu R_a)/\sigma$$

et donc

$$M_{R_a} = e^{\theta a/\sigma} \exp(-R_a(\mu\theta/\sigma + \theta^2/2)).$$

Ceci suggère de choisir θ de sorte que

$$\mu\theta/\sigma + \theta^2/2 = 0.$$

Le choix est donc

$$\theta = -2\mu/\sigma.$$

et nous avons alors $M_{R_a} = e^{\theta a/\sigma}$. Dans le cas où $R_a = \infty$, observons que $M_\infty = 0$ (pour le même choix de θ). Ainsi, nous avons

$$e^{\theta a/\sigma}\mathrm{P}(R_a < \infty) = E[M_{R_a}] = E[M_0] = 1.$$

■

Démonstration. En appliquant le théorème d'arrêt à $R_a \wedge t$, nous obtenons

$$1 = E[e^{-2(\kappa X_{R_a} + \kappa^2 R_a)} \mathbb{1}_{(R_a \leq t)}] + E[e^{-2(\kappa X_t + \kappa^2 t)} \mathbb{1}_{(R_a > t)}]$$

où $\kappa = \mu/\sigma$. Puisque $X_t/t \to 0$ presque-sûrement, nous avons

$$e^{-2(\kappa X_t + \kappa^2 t)} \to 0$$

sachant $(R_a > t)$. Finalement, lorsque t tend vers l'infini, seul le premier terme du membre de droite subsiste. Il est égal à

$$E[e^{-2\mu a/\sigma^2} \mathbb{1}_{(R_a \leq t)}]$$

et tend vers

$$e^{-2\mu a/\sigma^2}\mathrm{P}(R_a < \infty).$$

Ceci permet de conclure facilement. ■

5.4 Processus stationnaires

Définition 5.4.1 *Un processus aléatoire $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est stationnaire si, pour tout $s \geq 0$ et pour tous $t_1, \ldots, t_n$, $n \geq 1$, les vecteurs aléatoires*

$$^T(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = ^T(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$$

ont même loi de probabilité.

Exercice 73. Soit $\{N_t\ ;\ t \geq 0\}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y_0 une variable de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$ indépendante de ce processus de Poisson. On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$Y_t = Y_0(-1)^{N_t}.$$

a) Calculer $E[Y_t]$, $t \geq 0$.
b) Calculer $Cov(Y_s, Y_t)$, $s, t \geq 0$.
c) montrer que $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ est stationnaire.
d) On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$D_t = \int_0^t Y_s ds.$$

Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire. Interprétez ce résultat.

Définition 5.4.2 *Un processus aléatoire $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est faiblement stationnaire si, pour tous $s, t \geq 0$,*
i) $E[X_t] = c$,
ii) $k(s,t) = Cov(X_s, X_t)$ ne dépend que de $|t - s|$.

Commentaires. Un processus gaussien est stationnaire s'il est faiblement stationnaire.

Exercice 74. Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard réel à une dimension.

a) On définit $Y_0 = 0$ et pour tout $t > 0$, $Y_t = tX_{1/t}$. Démontrer que $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard à une dimension.
b) On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = e^{-\alpha\frac{t}{2}} X_{e^{\alpha t}}$$

où α est un réel positif. Démontrer que $\{Z_t,\ t \geq 0\}$ est un processus aléatoire faiblement stationnaire. Démontrer que ce processus est en fait stationnaire.

Exercice 75. On suppose que les instants de défaillance d'un système, $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$ forment un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$. A chaque instant $t \geq 0$, on note γ_t la variable aléatoire réelle égale au temps d'attente de la prochaine défaillance à partir de t.

a) Donner l'allure d'une trajectoire du processus aléatoire $\{\gamma_t\ ,\ t \geq 0\}$.

b) Démontrer que ce processus est stationnaire.

c) Calculer, pour tout $s \geq 0$

$$R(s) = Cov(\gamma_t, \gamma_{t+s}).$$

5.5 Exercices

Exercice 76. On considère la suite aléatoire définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_k &= S_{k-1} + X_k \end{aligned}$$

où les variables $X_k,\ k = 1, 2, \ldots$ sont des variables indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, de même loi :

$$\mathrm{P}(X_k = +1) = \mathrm{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On représente la suite $(S_k)_{k=1,\ldots}$ dans un repère orthonormé dans lequel l'axe des abscisses s'interprète comme l'axe des temps.
On appellera trajectoire de M à N toute réalisation de la suite (S_k) passant par les points M et N.

Première partie.

a) Sous quelles conditions existe-t-il une trajectoire de $O = (0, 0)$ à $N = (n, \nu)$?

b) Déterminer le nombre $\mathcal{C}_N$ de trajectoires joignant le point O au point N ?

c) (Principe de réflexion). Soient m, n, μ, ν des entiers t.q. $m < n$, $\mu > 0$ et $\nu > 0$. On pose

$$M = (m, \mu),\ M' = (m, -\mu),\ N = (n, \nu).$$

1) Montrer qu'il existe autant de trajectoires de M à N qui touchent l'axe des abscisses que de trajectoires de M' à N.

2) En déduire la probabilité d'aller de M en N sans jamais rencontrer l'axe des abscisses.

Deuxième partie.

a) Déterminer $\alpha_{2n} = \mathrm{P}(S_{2n} = 0)$.

b) Déterminer le nombre x_{2n-1} de trajectoires telles que

$$S_1 > 0,\ S_2 > 0,\ \ldots,\ S_{2n-2} > 0,\ S_{2n-1} = 0.$$

c) Soit y_n le nombre de trajectoires telles que

$$S_1 > 0,\ S_2 > 0,\ \ldots,\ S_{n-1} > 0,\ S_n > 0.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} y_{2n-1} &= 2y_{2n-2} \\ y_{2n} - x_{2n-1} &= 2(y_{2n-1} - x_{2n-1}). \end{aligned}$$

En déduire $y_{2n} = \frac{C_{2n}^n}{2}$.

d) Montrer que $\mathrm{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \alpha_{2n}$.

e) Déterminer la loi du temps T de premier retour en O. Vérifier que $\mathrm{P}(T < \infty) = 1$.

Exercice 77. Soit $\{X_t,\ t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard. Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire définie pour tout $t \geq 0$ par

$$Y_t = \int_0^t s dX_s.$$

Exercice 78. Soit $\{W_t\ ,\ t \geq 0\}$ un processus aléatoire tel que conditionnellement à $W(0) = x$ le processus $\{B_t\ ,\ t \geq 0\}$ défini par

$$\forall t \geq 0\ , \quad B_t = W_t - x$$

est un mouvement brownien standard. On note $p(t, x, .)$ la densité conditionnelle de la variable W_t sachant $W_0 = x$.

a) Donner l'expression de $p(t, x, .)$ et vérifier que

$$p(t, x, .) \to \delta_x(.) \quad \text{lorsque } t \to 0\ .$$

b) Montrer que $p(t, x, .)$ est solution de l'équation de la chaleur (équation de diffusion)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

Exercice 79. Marche aléatoire sur $\epsilon\mathbb{Z}$. Soit $\epsilon > 0$. On considère le processus de Markov $\{X_t^\epsilon, t \geq 0\}$ à valeurs dans

$$\epsilon\mathbf{Z} = \{\ldots, -\epsilon n, \ldots, -\epsilon, 0, +\epsilon, \ldots, +\epsilon n, \ldots\}$$

défini de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} X_0^\epsilon & = 0 \\ \mathrm{P}(X_{t+h}^\epsilon = \epsilon n \pm \epsilon \mid X_t^\epsilon = \epsilon n) & = \frac{1}{2}h + o(h) \\ \mathrm{P}(|X_{t+h}^\epsilon - \epsilon n| > \epsilon \mid X_t^\epsilon = \epsilon n) & = o(h)\ . \end{array}$$

a) Décrire les équations de Kolmogorov pour les probabilités

$$p^\epsilon(t, \epsilon n) = \mathrm{P}(X_t^\epsilon = \epsilon n) \ .$$

b) On pose

$$u^\epsilon(t, x) = p^\epsilon(\epsilon^{-2} t, x)$$

où $n = \lfloor x/\epsilon \rfloor$. relier $u^\epsilon(t, x)$ aux solutions de l'équation de la chaleur lorsque $\epsilon \to 0$.

Exercice 80. On contraint maintenant le processus $\{X_t^\epsilon \ , \ t \geq 0\}$ à rester dans l'intervalle (a, b) en imposant à a et à b (ou plutôt aux points les plus prôches de a et b dans la discrétisation d'ordre ϵ) d'être absorbants. Soit $a \leq x = n\epsilon \leq b$ et

$$\sigma(x) = \mathrm{P}(\exists t \geq 0 \text{ t.q. } X_t^\epsilon = a \mid X_0^\epsilon = x) \ .$$

a) Justifier l'équation suivante

$$0 = \frac{1}{2}(\sigma(x - \epsilon) + \sigma(x + \epsilon)) - \sigma(x) \ .$$

b) Quelle est la probabilité pour que le processus $\{W_t \ , \ t \geq 0\}$ atteigne la valeur a avant atteindre la valeur b partant de la valeur $a \leq x \leq b$? (Réponse : $(b - x)/(b - a)$)

Bio de Mickey Markov. Mickey Markov est né au siècle dernier. Son grand-père, Evgeni sergueievitch, danseur étoile à l'opéra de Moscou, aurait fuit la répression stalinienne, profitant d'une tournée du Bolchoï pour demander l'asile politique à la France. Grand-mère Markov rejoint son mari à Paris à l'occasion d'une visite officielle d'une délégation du parti où elle travaille comme traductrice, réussissant à tromper la vigilance du KGB grâce à un déguisement de ramoneur savoyard (Nombreux en effet étaient à l'époque les savoyards montés à la capitale pour le nettoyage des cheminées où pour la vente des huitres en bourriche). À la veillée, Pépé Markov raconte des bonnes histoires qu'il tient d'un parent mathématicien, distrayant ainsi agréablement toute la famille. Pépé Markov initie très tôt le jeune Mickey au calcul des probabilités notamment pour le craps, le poker et certains aspects des mathématiques financières. Mickey apprend aussi à cette occasion que la réalité est complexe à appréhender et courir vite s'avère parfois utile aussi. Il est initié à la théorie du risque, notamment du fait d'un vieux scooter sans freins. Mamie Markov lui dévoile les secrets des files d'attente et de la gestion des stocks, les fruits d'une longue pratique sous le régime communiste. Autodidacte doué Mickey Markov s'essaie à plusieurs métiers dont trombonniste, plongiste, scaphandrier, ingénieur réseau, moniteur de kayak. Il aurait un cousin, un dénommé Jojo, qui aurait intégré Ensimag-Télécom. Il séjourne dans plusieurs pays et visite la corse qu'il traverse même à pied par le GR 20, expérience lui donnant l'occasion de méditer sur le rapport à la nature dans la tradition de Rousseau, ainsi qu'au véritable sens des probabilités et des marches aléatoires lorsqu'il perd sa carte au 25 millième.