CNDRI
Nondestructive Testing
by Ionising Radiations

Séminaire de tomographie ToRIID

CPE LYON, 02/02/2009

TOMOGRAPHIE PAR DIFFUSION :

LE PROBLEME DE L'ATTENUATION

A. Peterzol

Projet SPIDERS

I. INTRODUTION AU SUJET

(formules et géométrie de la tomographie par diffusion)

II. SOLUTIONS EXISTANTES :

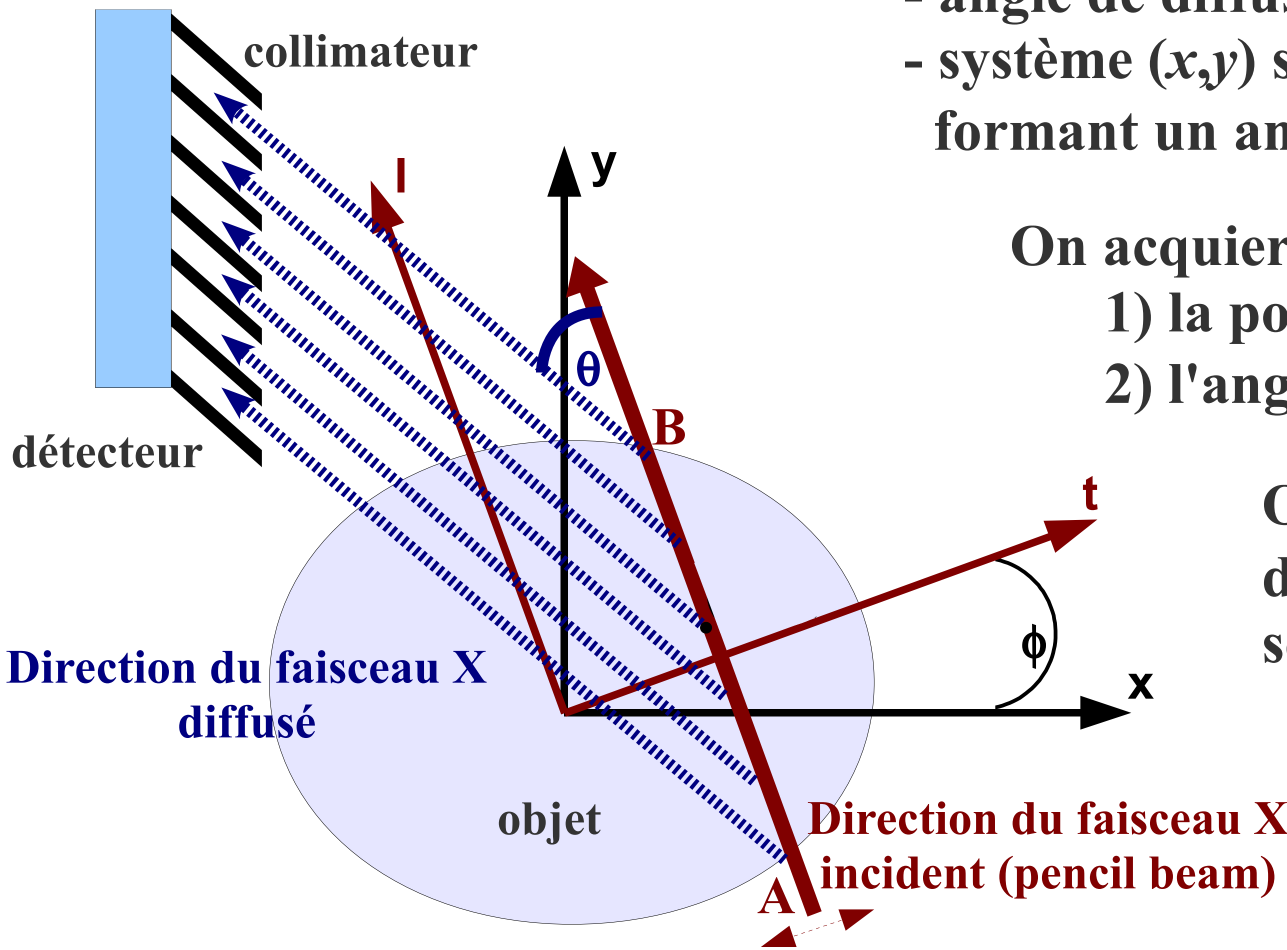
a) Petits angles

b) Grands angles

III. NOTRE APPROCHE (travail en cours)

IV. TRAVAUX FUTURS

Définition de la Géométrie



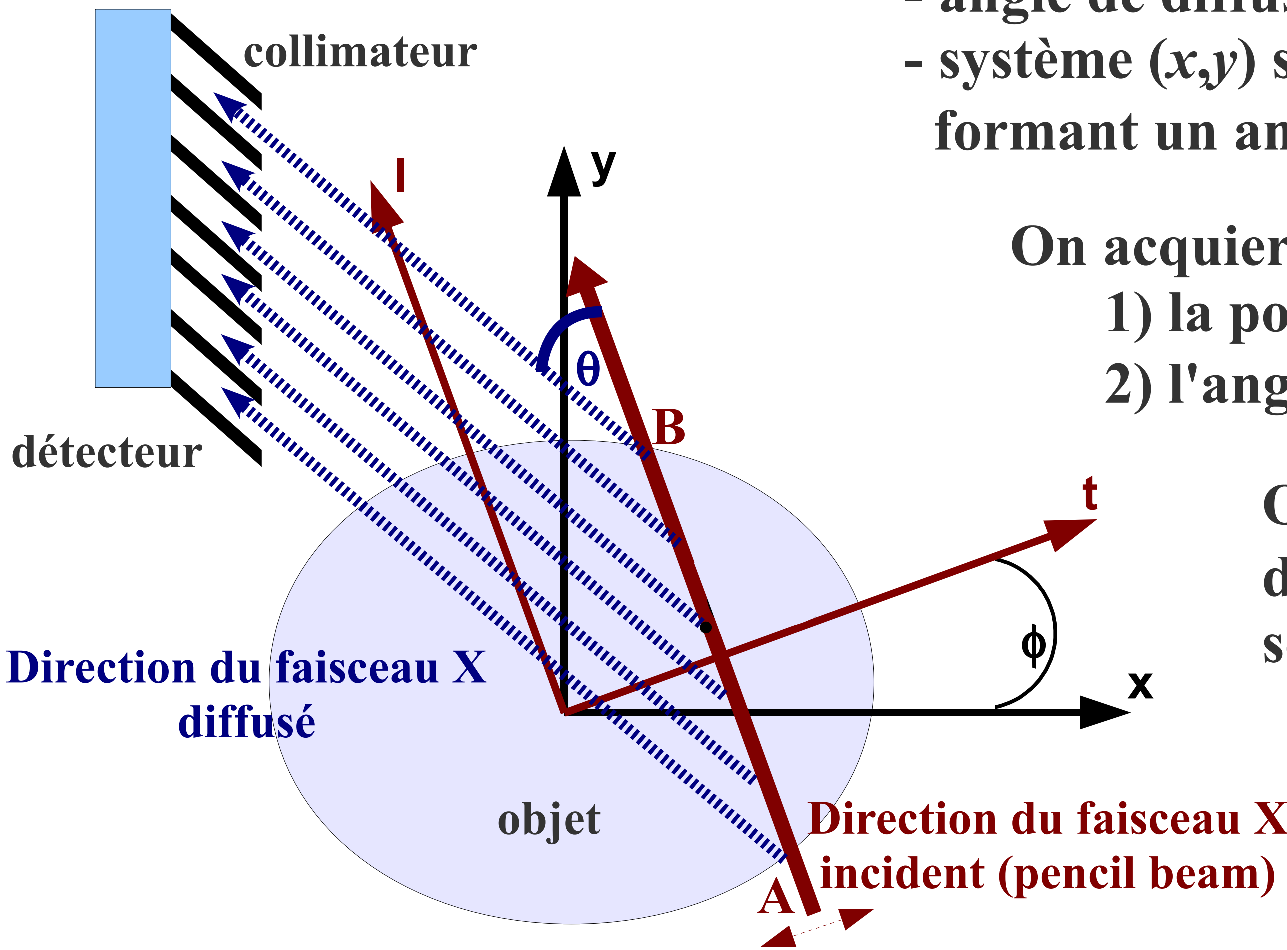
- système (t,l) fixe
- faisceau incident est translaté suivant t
- angle de diffusion θ fixe
- système (x,y) solidaire avec l'objet et formant un angle ϕ avec le système (t,l)

On acquiert des signaux variant avec:
1) la position t du faisceau
2) l'angle ϕ (on fait tourner l'objet)

On mesure tous les photons diffusés (à l'angle θ) par le segment AB

Définition de la Géométrie

- système (t,l) fixe
- faisceau incident est translaté suivant t
- angle de diffusion θ fixe
- système (x,y) solidaire avec l'objet et formant un angle ϕ avec le système (t,l)



On acquiert des signaux variant avec:

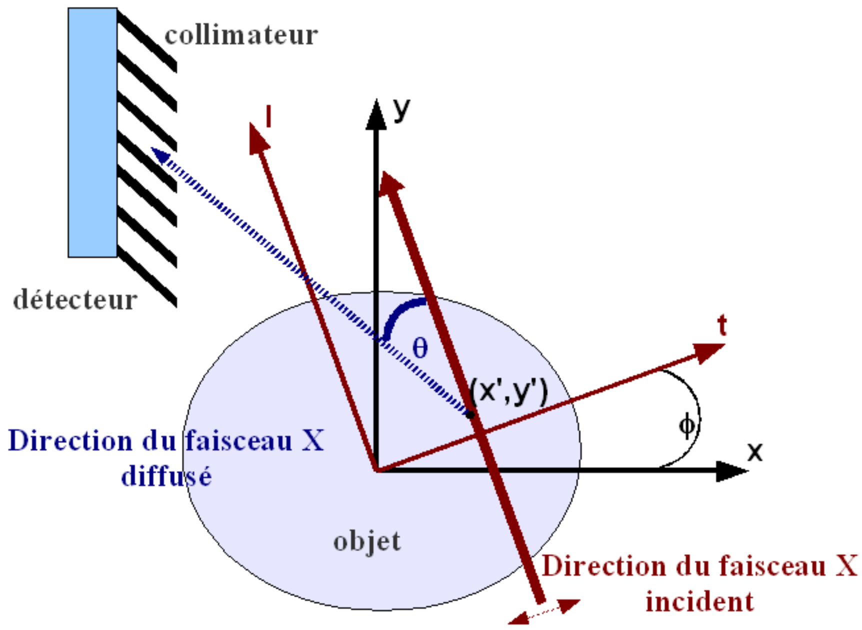
1) la position t du faisceau
2) l'angle ϕ (on fait tourner l'objet)

On mesure tous les photons diffusés (à l'angle θ) par le segment AB

Hypothèse : faisceau monochromatique d'énergie E_0

Signal mesuré

Contribution au signal provenant du volume élémentaire $\Delta V = dSdl$ en (x',y') :



1) atténuation du faisceau <u>incident</u> jusqu'au volume élémentaire en (x',y')

2) diffusion du faisceau par le volume élémentaire en (x',y') selon la direction ϑ et dans l'angle solide $\Delta\Omega$ vu par le détecteur

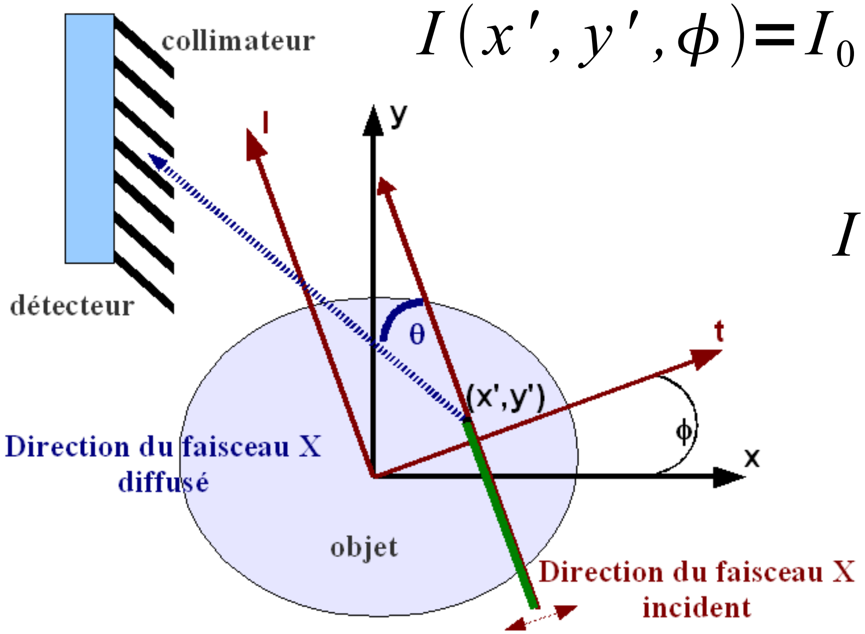
3) atténuation du faisceau <u>diffusé</u> à partir de (x',y') et jusqu'au détecteur

Signal mesuré

Contribution au signal provenant du volume élémentaire $\Delta V = dSdl$ en (x',y') :

1) atténuation du faisceau incident jusqu'au volume élémentaire en (x',y')

$$I(x',y',\phi) = I_0 * \exp\Big(-\int_{\substack{-\infty \\ (\phi,t)\ line}}^{l'(x',y')} \mu(x,y)\,dl\Big) = I_0 * \boxed{\alpha(x',y',\phi)}$$



$I(x',y',\phi)$: N_{bre} **de photons par unité de temps sur** dS **en (x',y') suivant la ligne** (ϕ,t)

I_0: N_{bre} **de photons inc. par unité de temps sur** dS

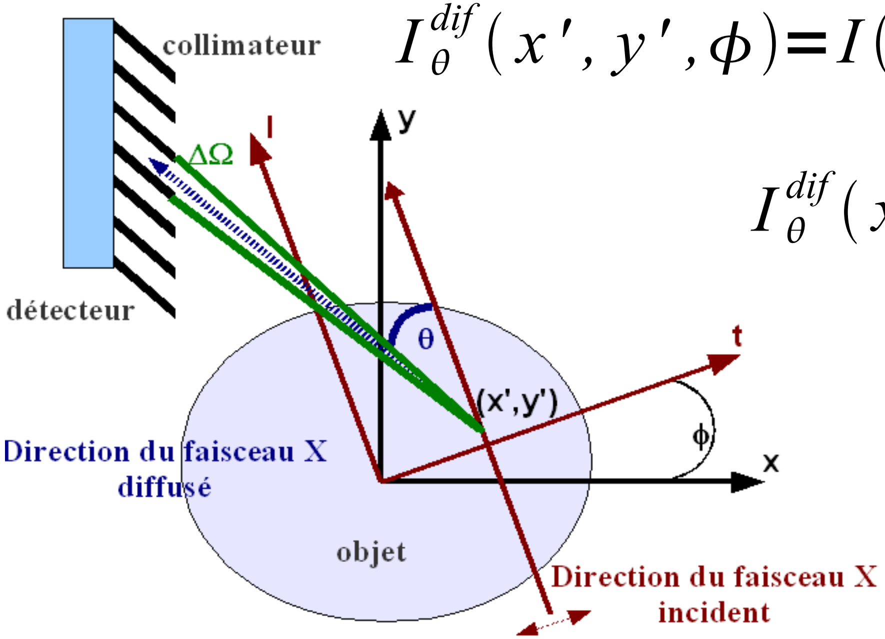
$\mu(x,y)$: **coefficient d'atténuation linéique (à** E_0**)**

$\alpha(x',y',\phi)$ **: atténuation jusqu'au** (x',y')
NB α est fonction du point et de la direction du faisceau incident

Signal mesuré

Contribution au signal provenant du volume élémentaire $\Delta V = dSdl$ en (x',y') :

2) diffusion du faisceau par le volume élémentaire en (x',y') selon la direction ϑ et dans l'angle solide $\Delta\Omega$



$$I_{\theta}^{dif}(x',y',\phi)=I(x',y',\phi)*\boxed{\frac{d}{d\Omega}\sigma(x',y',\theta)n(x',y')\Delta\Omega dl}$$

$I_{\theta}^{dif}(x',y',\phi)$: **N$_{bre}$ de photons diffusés par unité de temps en (x',y') selon l'angle θ et dans $\Delta\Omega$**

$\frac{d}{d\Omega}\sigma(x',y',\theta)$: **section efficace différentielle**

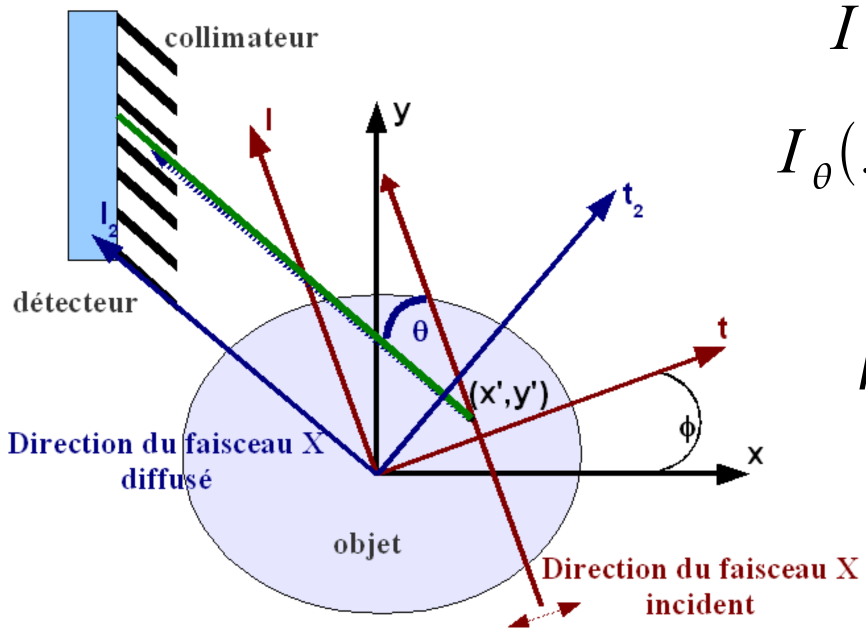
$n(x',y')$: **N$_{bre}$ de centres diffusants / unité de ΔV**

définissons : $\frac{d}{d\Omega}\sigma(x',y',\theta)n(x',y')=\sigma(x',y',\theta)$

Signal mesuré

Contribution au signal provenant du volume élémentaire $\Delta V = dSdl$ en (x',y') :

3) atténuation du faisceau diffusé à partir du (x',y') et jusqu'au détecteur



$$I_\theta(x',y',\phi) = I_\theta^{dif}(x',y',\phi) * \boxed{\beta(x',y',\theta,\phi)}$$

$I_\theta(x',y',\phi)$: **N_{bre} de photons diffusés par unité de Δt en (x',y') selon θ, dans $\Delta\Omega$ et «détectés»**

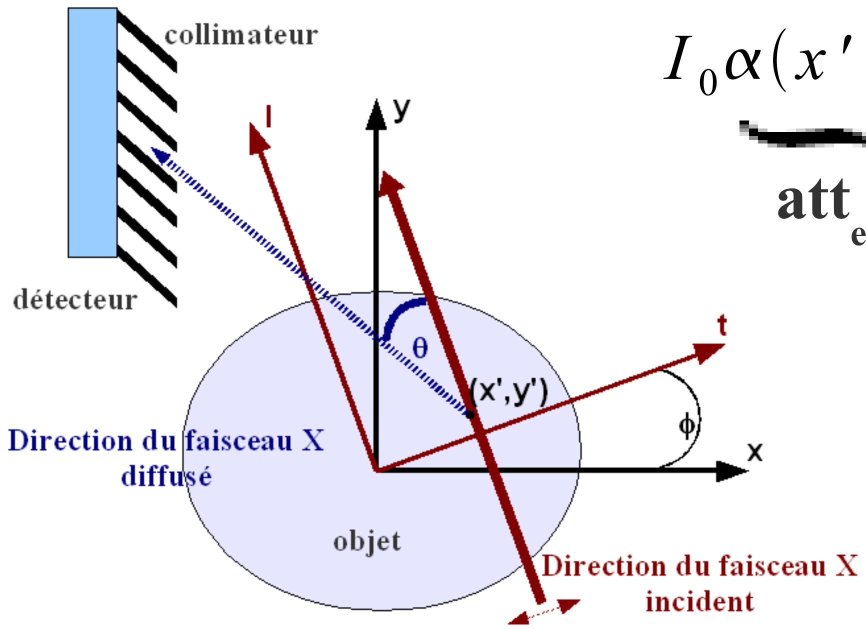
$$\beta(x',y',\theta,\phi) = \exp\left(-\int_{l_2'(x',y')}^{+\infty} \mu(x,y)\, dl_2\right)$$

$(\phi+\theta, t_2)$ *line*

NB β est fonction du point (x',y') et de la direction du faisceau diffusé (l_2)

Signal mesuré

Contribution au signal provenant du volume élémentaire $\Delta V = dSdl$ en (x',y') :



$$\underbrace{I_0 \alpha(x',y',\phi)}_{\text{att}_{\text{entrée}}} * \underbrace{\sigma(x',y',\theta)}_{\text{prob}_{\text{diff}}} \Delta\Omega\, dl * \underbrace{\beta(x',y',\theta,\phi)}_{\text{att}_{\text{sortie}}}$$

Le but de la mesure : remonter à une « cartographie » de la fonction $\sigma(x,y,\theta)$

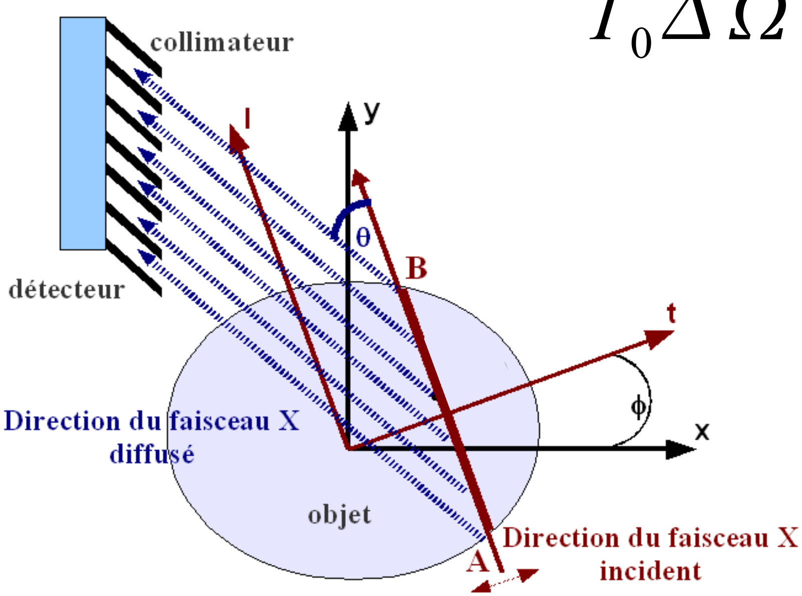
Signal mesuré

Signal dû au segment *AB* = addition des signaux provenant de tous les points (*x*,*y*) sur le segment :

$$I_\theta(\phi,t) = I_0 \Delta\Omega \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \alpha(x,y,\phi)\,\sigma_\theta(x,y)\,\beta_\theta(x,y,\phi)\,dl$$

$$\frac{I_\theta(\phi,t)}{I_0 \Delta\Omega} = \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \alpha(x,y,\phi)\,\sigma_\theta(x,y)\,\beta_\theta(x,y,\phi)\,dl$$

$$= p_\theta(\phi,t)$$



- **hypothèse implicite : $\Delta\Omega$ ne dépend pas du point (x,y)**
- **on travaille à angle de diffusion ϑ constant**

Signal mesuré

Signal dû au segment *AB* = addition des signaux provenant de tous les points (*x*,*y*) sur le segment :

$$I_\theta(\phi,t) = I_0 \Delta\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x,y,\phi)\sigma_\theta(x,y)\beta_\theta(x,y,\phi)\,dl$$

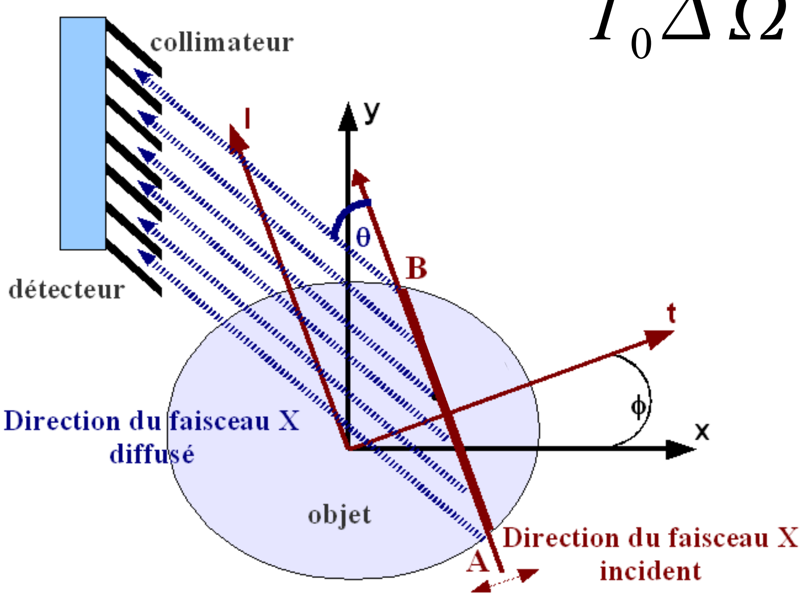
(ϕ,t) *line*

$$\frac{I_\theta(\phi,t)}{I_0\Delta\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x,y,\phi)\sigma_\theta(x,y)\beta_\theta(x,y,\phi)\,dl$$

(ϕ,t) *line*

$$= p_\theta(\phi,t)$$

transformée de Radon de $f = \alpha\sigma\beta$?



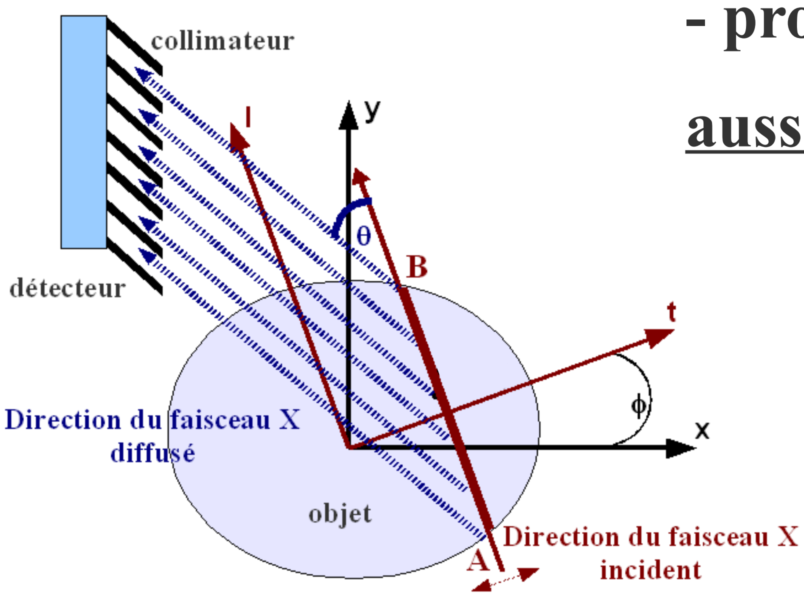
- **hypothèse implicite : $\Delta\Omega$ ne dépend pas du point (x,y)**
- **on travaille à angle de diffusion ϑ constant**

Signal mesuré

Peut-on assimiler notre mesure à la transformée de Radon de *f*(*x*,*y*) ?

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{\substack{-\infty \\ (\phi,t)\ line}}^{+\infty} \alpha(x, y, \phi)\, \sigma_\theta(x, y)\, \beta_\theta(x, y, \phi)\, dl$$

Réponse : NON



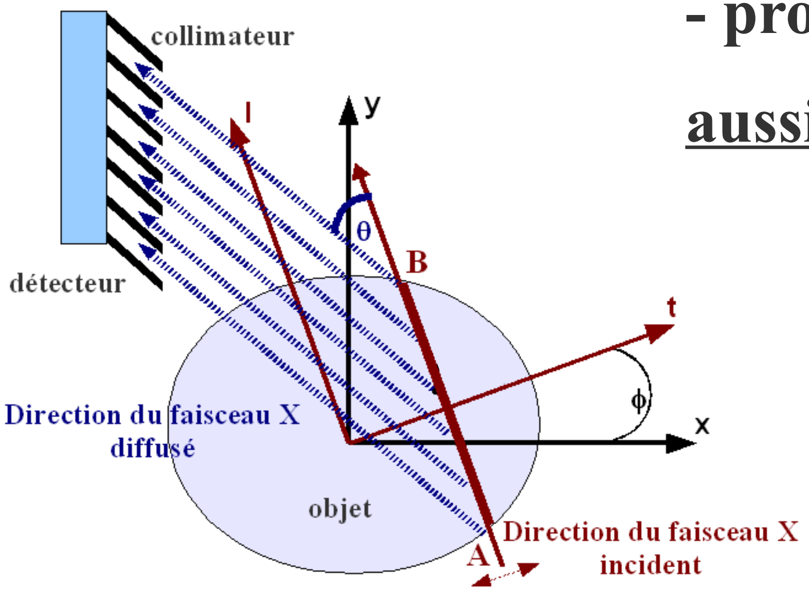
- problème : α et β dépendent du point (x,y) <u>et aussi de la direction de la ligne d'intégration</u>

Signal mesuré

Peut-on assimiler notre mesure à la transformée de Radon de *f*(*x*,*y*) ?

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{\substack{-\infty \\ (\phi,t)\ line}}^{+\infty} \alpha(x, y, \phi)\, \sigma_\theta(x, y)\, \beta_\theta(x, y, \phi)\, dl$$

Réponse : NON



- problème : α et β dépendent du point (x,y) <u>et aussi de la direction de la ligne d'intégration</u>

Quelle solution ?

I. INTRODUTION AU SUJET

(formules et géométrie de la tomographie par diffusion)

II. SOLUTIONS EXISTANTES :

a) Petits angles

b) Grands angles

III. NOTRE APPROCHE (travail en cours)

IV. TRAVAUX FUTURS

Signal mesuré

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \alpha(x, y, \phi)\, \sigma_\theta(x, y)\, \beta_\theta(x, y, \phi)\, dl$$

Solution « ordre 0 » : on considère un objet petit et « léger » : on néglige l'atténuation (α et β)

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \sigma_\theta(x, y)\, dl$$

$p_\theta(\phi, t)$ est l'intégrale de ligne de la fonction $\sigma_\theta(x,y)$ (transformée de Radon)

→ on peut appliquer l'algorithme « filtered back projection (FBP) » sur l'ensemble $\{p_\theta(\phi, t)\}$

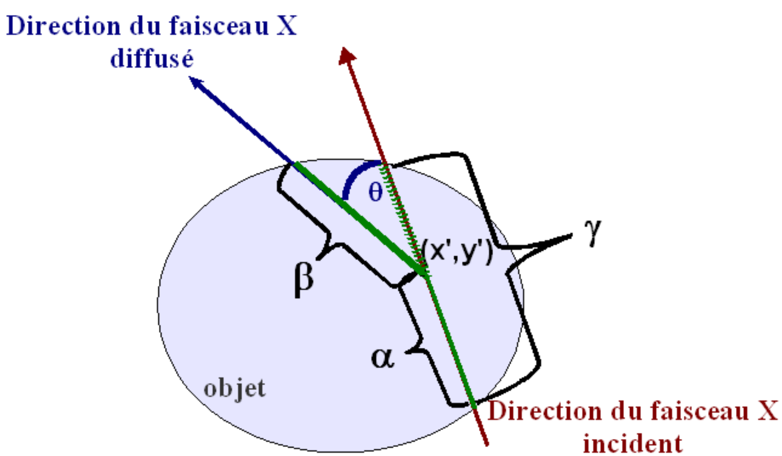
Signal mesuré

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \alpha(x, y, \phi)\,\sigma_\theta(x, y)\,\beta_\theta(x, y, \phi)\,dl$$

Solution « ordre 1 » : **on considère que l'atténuation totale ($\boldsymbol{\alpha * \beta}$) est équivalente à l'atténuation par transmission :**

$$\alpha(x', y', \phi)\,\beta_\theta(x', y', \phi) = \gamma_\theta(\phi, t)$$

approximation valide pour θ petit (diffusion Rayleigh et diffraction)



$$\frac{p_\theta(\phi, t)}{\gamma_\theta(\phi, t)} = \int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty} \sigma_\theta(x, y)\,dl$$

$p_\theta(\phi, t)/\gamma_\theta(\phi, t)$ = intégrale de ligne de $\sigma_\theta(x,y)$

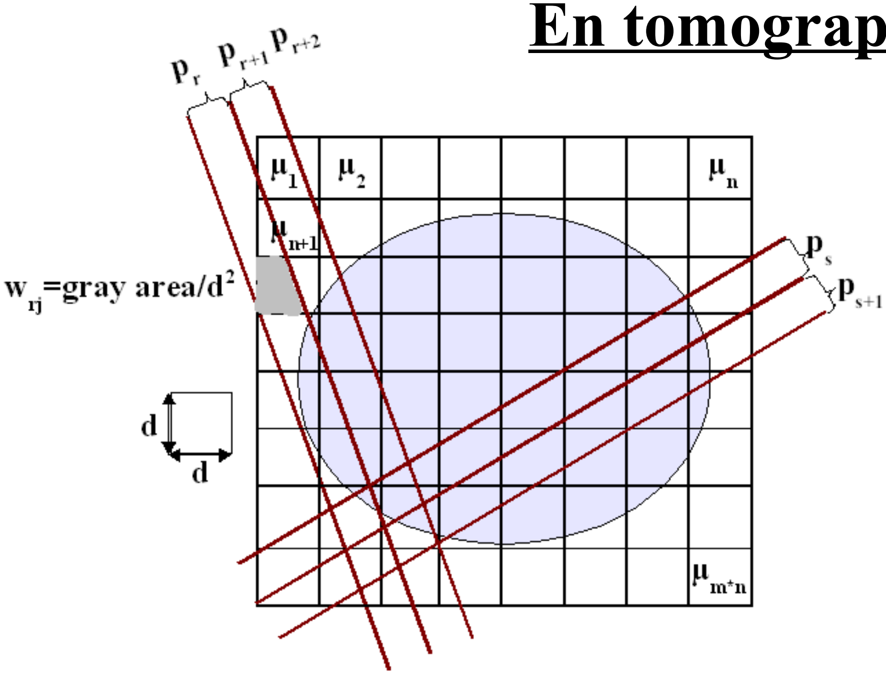
→ on peut appliquer l'algorithme FBP

Signal mesuré

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{\substack{-\infty \\ (\phi,t)\ line}}^{+\infty} \alpha(x, y, \phi)\, \sigma_\theta(x, y)\, \beta_\theta(x, y, \phi)\, dl$$

Solution « ordre 2 » : **utiliser des techniques algébriques (ART)**

En tomographie par transmission:



$$p_s = \sum_j w_{sj}\, \mu_j \quad s = 1, 2, \dots, S \qquad j = 1, 2, \dots, N$$

S: N_{bre} de projections; N: N_{bre} de pixels

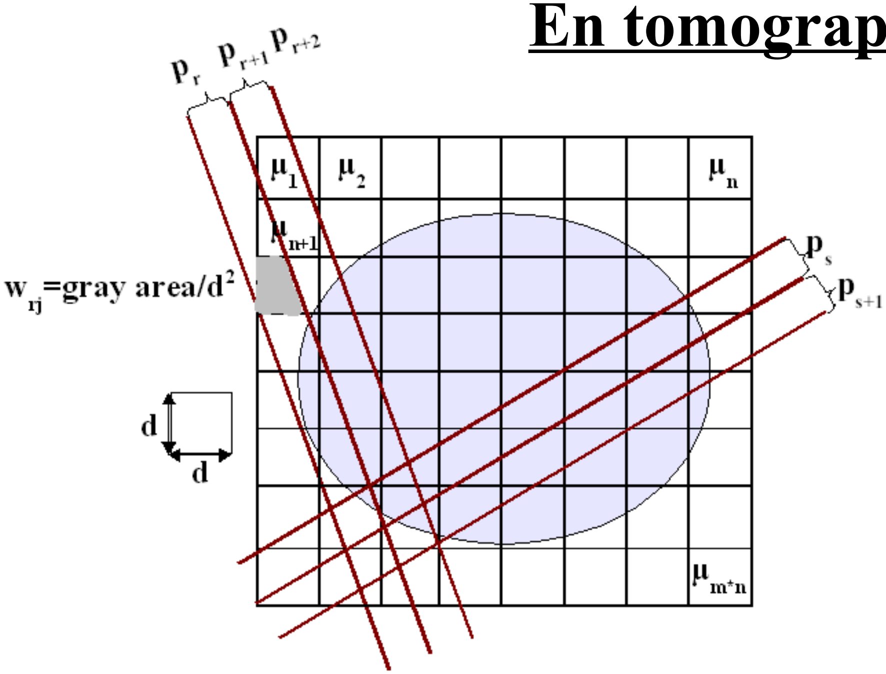
Il faut résoudre le système de S équations linéaires

Signal mesuré

$$p_\theta(\phi,t)=\int_{-\infty \atop (\phi,t)\ line}^{+\infty}\alpha(x,y,\phi)\,\sigma_\theta(x,y)\,\beta_\theta(x,y,\phi)\,dl$$

Solution « ordre 2 » : **utiliser des techniques algébriques (ART)**

En tomographie par transmission:



$$p_s=\sum_j w_{sj}\mu_j \quad s=1,2,\dots,S \qquad j=1,2,\dots,N$$

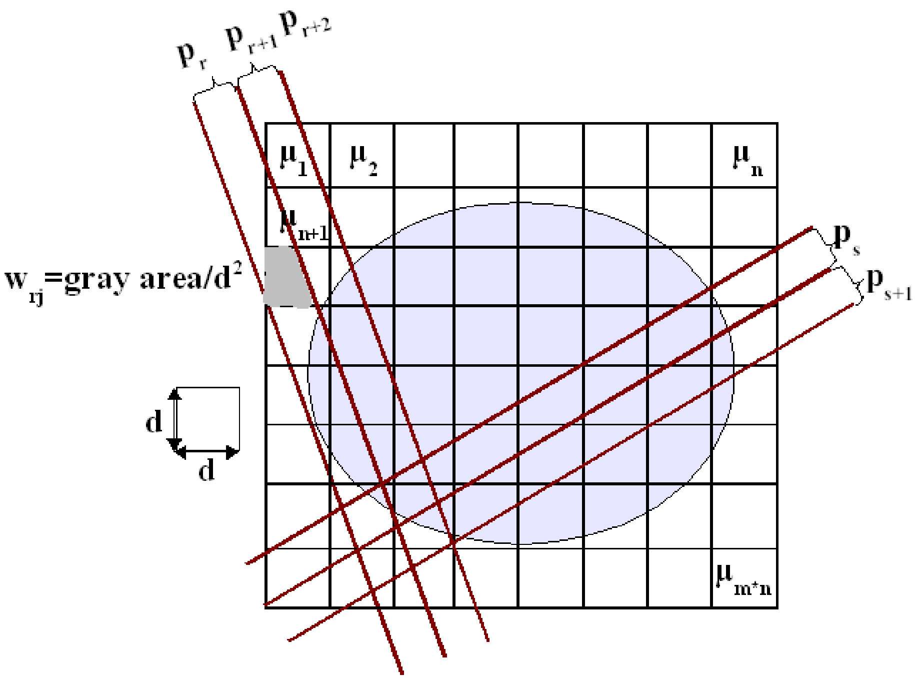
S: N_{bre} de projections; N: N_{bre} de pixels

Il faut résoudre le système de S équations linéaires

Idée : appliquer la même approche en tomographie par diffusion [Grant 1995]

Solution « ordre 2 » : utiliser des techniques algébriques (ART)

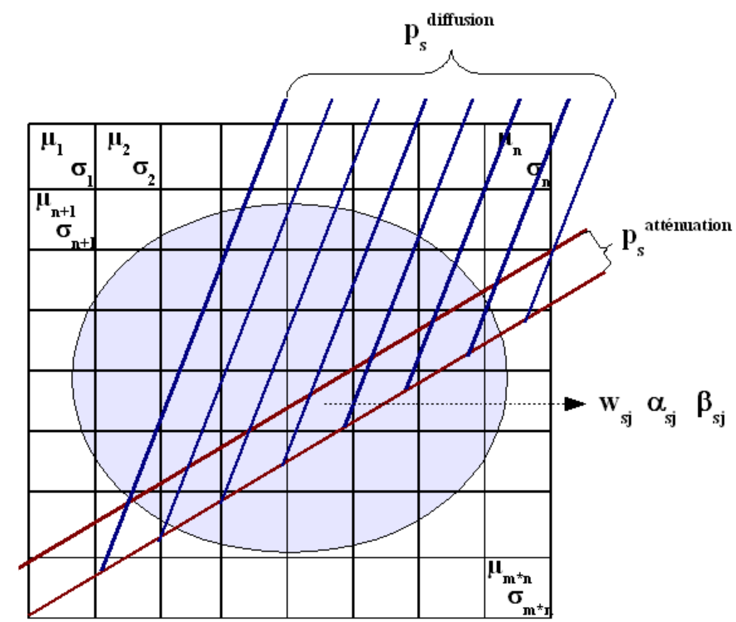
tomographie par transmission:



$$p_s^{atténuation} = \sum_j w_{sj} \mu_j$$

$$s = 1,2, \dots, S$$
$$j = 1,2, \dots, N$$

tomographie par diffusion:

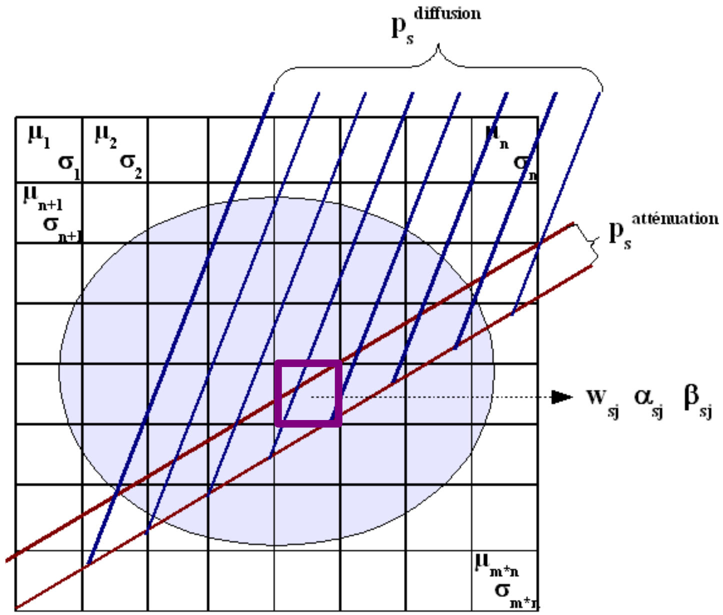


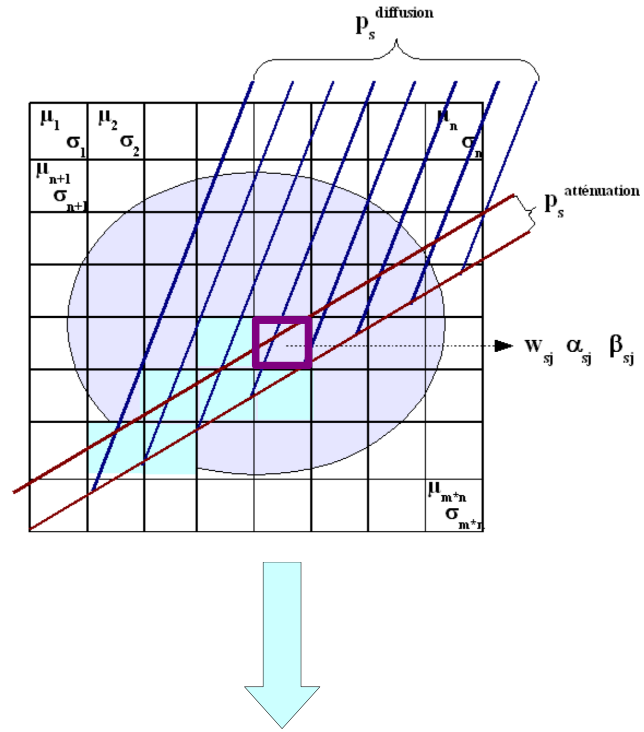
$$p_s^{diffusion} = \sum_j w_{sj} \alpha_{sj} \beta_{sj} \sigma_j$$

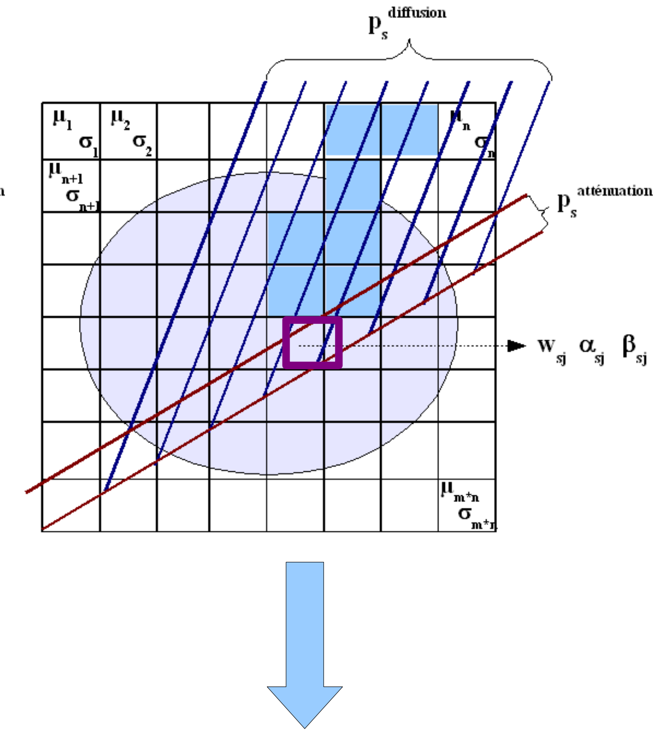
$$\alpha_{sj} = \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{ent} \mu_i\right)$$

$$\beta_{sj} = \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{sor} \mu_i\right)$$

<u>Solution « ordre 2 » :</u> utiliser des techniques algébriques (ART) <u>pour la tomographie par diffusion:</u>







$$p_s^{diffusion} = \sum_j w_{sj} \alpha_{sj} \beta_{sj} \sigma_j$$

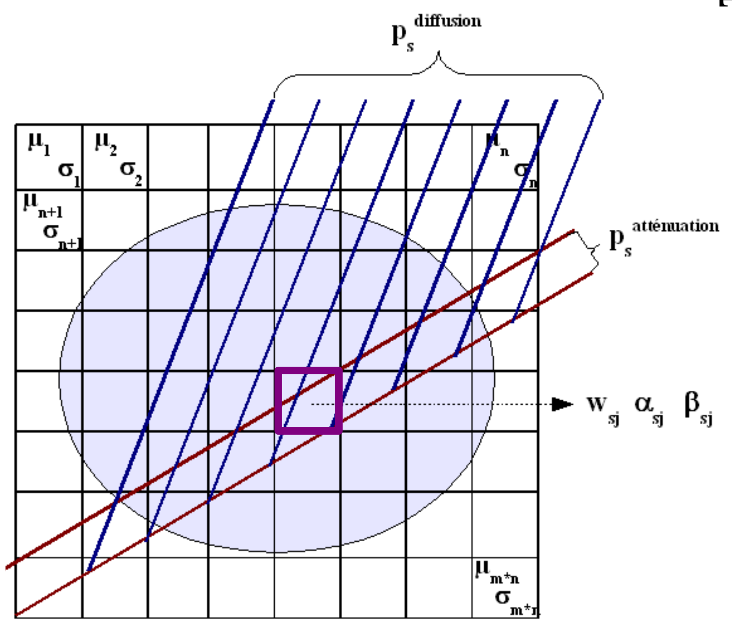
$$\alpha_{sj} = \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{ent} \mu_i\right)$$

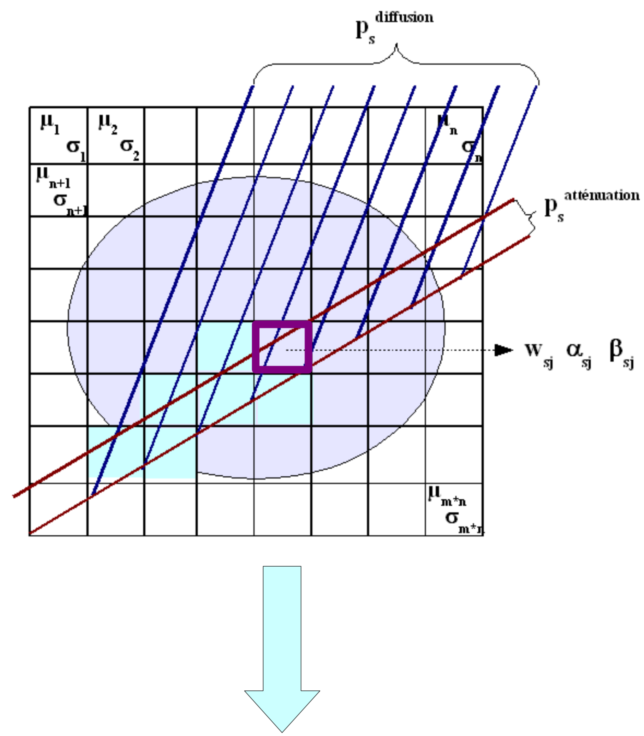
$$\beta_{sj} = \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{sor} \mu_i\right)$$

$$w_{sji}^{ent} \neq 0$$

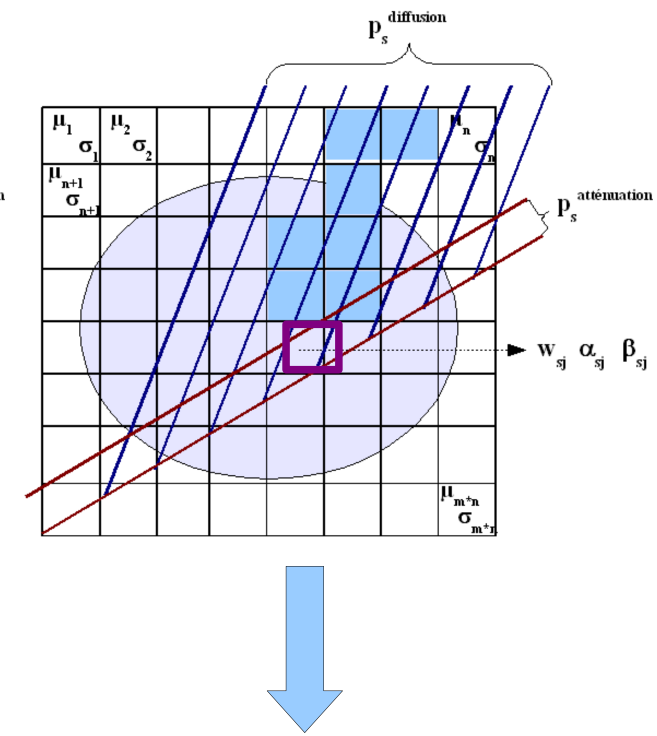
$$w_{sji}^{sor} \neq 0$$

Solution « ordre 2 » : **utiliser des techniques algébriques (ART) pour la tomographie par diffusion:**





$w_{sji}^{ent} \neq 0$



$w_{sji}^{sor} \neq 0$

$$p_s^{diffusion} = \sum_j w_{sj} \alpha_{sj} \beta_{sj} \sigma_j$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{sj} &= \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{ent} \mu_i\right) \\ \beta_{sj} &= \exp\left(-\sum_i w_{sji}^{sor} \mu_i\right) \end{aligned}\right\}$$ **il faut connaître la distribution de μ (μ_i i=1,2,...,N)**

SOLUTIONS EXISTANTES :

- **Solution « ordre 0 » :** on néglige l'atténuation (α et β)

  + : facile à utiliser
  - : valide que pour des objets petits et légers

- **Solution « ordre 1 » :** on considère que l'atténuation totale ($\alpha * \beta$) est équivalente à l'atténuation par transmission :

  - : il faut faire des mesures d'atténuation
  + : valide pour objets de grande taille
  - : valide uniquement pour petits angles (et µ peu variable)

- **Solution « ordre 2 » :** utiliser des techniques algébriques

  -- : il faut connaître la distribution de µ (µ(x,y))
  + : valide pour objets de grande taille
  + : valide pour touts les angles

SOLUTIONS EXISTANTES :

- **Solution « ordre 0 » :** on néglige l'atténuation (α et β)

  \+ : facile à utiliser
  \- : valide que pour des objets petits et légers

- **Solution « ordre 1 » :** on considère que l'atténuation totale ($\alpha * \beta$) est équivalente à l'atténuation par transmission :

  \- : il faut faire des mesures d'atténuation
  \+ : valide pour objets de grande taille
  \- : valide uniquement pour petits angles
  (et μ peu variable)

F B P

- **Solution « ordre 2 » :** utiliser des techniques algébriques

  -- : il faut connaître la distribution de μ ($\mu(x,y)$)
  \+ : valide pour objets de grande taille
  \+ : valide pour touts les angles

A R T

SOLUTIONS EXISTANTES :

- **Solution « ordre 0 » :** on néglige l'atténuation (α et β)

  +: facile à utiliser
  - : valide que pour des objets petits et légers

- **Solution « ordre 1 » :** on considère que l'atténuation totale ($\alpha * \beta$) est équivalente à l'atténuation par transmission :

  - : il faut faire des mesures d'atténuation
  + : valide pour objets de grande taille
  - : valide uniquement pour petits angles
  (et μ peu variable)

F B P

- **Solution « ordre 2 » :** utiliser des techniques algébriques

  -- : il faut connaître la distribution de μ (μ(x,y))
  + : valide pour objets de grande taille
  + : valide pour touts les angles

  -- : couteuse en temps de calcul

A R T

I. INTRODUTION AU SUJET

(formules et géométrie de la tomographie par diffusion)

II. SOLUTIONS EXISTANTES :

a) Petits angles

b) Grands angles

III. NOTRE APPROCHE (travail en cours)

IV. TRAVAUX FUTURS

III. NOTRE APPROCHE

Solution « ordre 2 » :

- **il faut connaître a priori la distribution de µ**
- **on utilise des techniques algébriques**

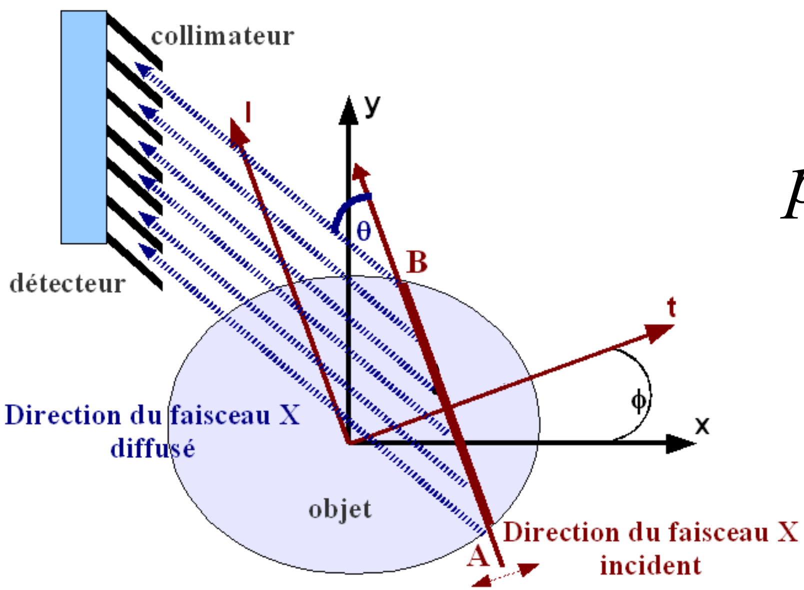
Notre idée :

- **on suppose de connaître la distribution de µ →**
- **est-on obligé d'utiliser l'approche algébrique ?**
- **peut-on utiliser la FBP ?**

Signal mesuré :

$$p_\theta(\phi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x, y, \phi)\sigma_\theta(x, y)\beta_\theta(x, y, \phi)dl$$

(ϕ,t) *line*



$p_\theta(\phi, t)$ **n'est pas la transformée de Radon de une fonction *f(x,y)***

- **peut-on utiliser la FBP ?**

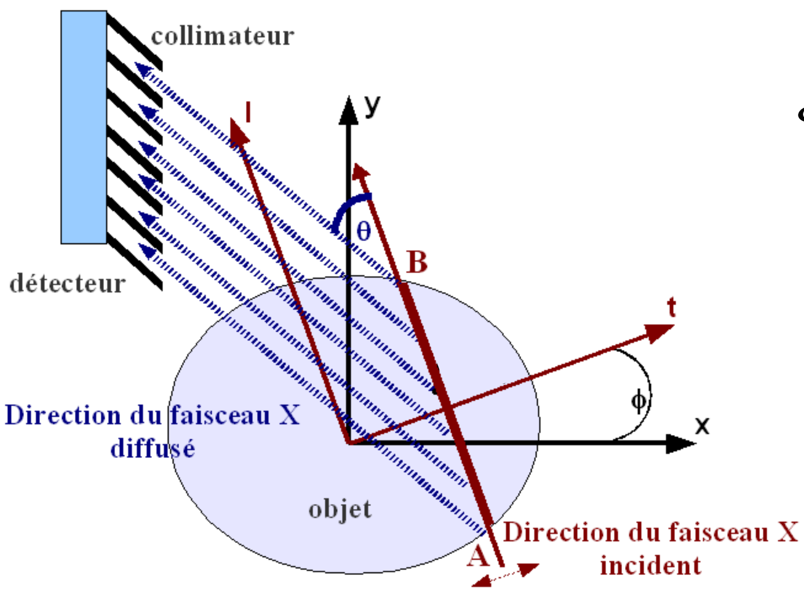
III. NOTRE APPROCHE

$$p_\theta(\phi,t)=\int_{-\infty\ (\phi,t)\ line}^{+\infty}\alpha(x,y,\phi)\sigma_\theta(x,y)\beta_\theta(x,y,\phi)dl$$

$$p_\theta(\phi,t)=\int_{-\infty\ (\phi,t)\ line}^{+\infty}\sigma_\theta(x,y)a_\theta(x,y,\phi)dl$$

$$a_\theta(x,y,\phi)=\alpha(x,y,\phi)\beta_\theta(x,y,\phi)$$

$$g_\theta(x,y,\phi)=\sigma_\theta(x,y)a_\theta(x,y,\phi)$$



$$p_\theta(\phi,t)=\int_{-\infty\ (\phi,t)\ line}^{+\infty}g_\theta(x,y,\phi)dl$$

III. NOTRE APPROCHE

1) $$p_\theta(\phi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\theta(x, y, \phi)\, dl$$
(ϕ,t) *line*

2) $$g_\theta(x, y, \phi) = \sigma_\theta(x, y)\, a_\theta(x, y, \phi)$$

3) $$G_\theta(u, v, \phi) = \iint g_\theta(x, y, \phi)\, e^{-2\pi i (ux+vy)}\, dxdy$$ **: FT 2D de g_θ (x,y,ϕ) en (x,y)**

4) $$P_\theta(\phi, w) = \int p_\theta(\phi, t)\, e^{-2\pi i w t}\, dt$$ **: FT 1D de p_θ (ϕ, t) en t**

5) $$P_\theta(\phi, w) = G_\theta(u = w\cos\phi, v = w\sin\phi, \phi)$$ **: FT 1D de p_θ (ϕ, t) en t = FT 2D de g_θ (x,y,ϕ)**

$$P_\theta(\phi, w) = G_\theta(u, v, \phi = atan(v/u))$$ **en (x,y) <u>pour un sous-ensemble de ϕ</u>**

Qu'est-ce qu'on obtient si on calcule la $FT^{inverse}$ 2D de G_θ $(u,v,\phi = atan(u/v))$ en (u,v) ?

Qu'est-ce qu'on obtient si on calcule la FT^inverse^ 2D de G_θ (*u,v,ϕ=atan(u/v)*) en *(u,v)* ?

6) $g_\theta'(x,y) = \iint G_\theta(u,v,\phi = atan(v/u))\, e^{2\pi i(xu+yv)}\, dudv$

7) $g_\theta'(x,y) \neq g_\theta(x,y,\phi)$ <u>**on perd la dépendance en ϕ**</u> $\left(p_\theta(\phi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\theta(x,y,\phi)\, dl \right)$ (ϕ,t) *line*

8) $g_\theta'(x,y) = \sigma_\theta(x,y)\, a_\theta'(x,y)$ $\left(g_\theta(x,y,\phi) = \sigma_\theta(x,y)\, a_\theta(x,y,\phi) \right)$

important : en appliquant la FBP aux profils mesurés, on peut remonter à $\sigma(x,y)$

9) $\boxed{\sigma_\theta(x,y) = g_\theta'(x,y) / a_\theta'(x,y)}$

10) $a_\theta'(x,y) = \iint A_\theta(u,v,\phi = atan(v/u))\, e^{2\pi i(xu+yv)}\, dudv$

11) $A_\theta(u,v,\phi) = \iint a_\theta(x,y,\phi)\, e^{-2\pi i(ux+vy)}\, dxdy$

III. NOTRE APPROCHE

	Méthode ART :	Méthode FBP « adaptée » :
Signal mesuré :	$p_s^\theta = \sum_j w_{sj} a_{sj}^\theta \sigma_j^\theta \quad s=1,2,\ldots,S$	$p_\theta(\phi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\theta(x,y,\phi)\sigma_\theta(x,y)dl$ ((ϕ,t) *line*)
On calcule à partir d'une cartographie de μ :	$a_{sj}^\theta = \alpha_{sj}\beta_{sj}^\theta$ **∀ projection s et ∀ point j**	$a_\theta(x,y,\phi) = \alpha(x,y,\phi)\beta_\theta(x,y,\phi)$ **∀ projection (t,ϕ) et ∀ point (x,y)**
Procédure :	**résoudre le système de S équations linéaires**	**appliquer la FBP aux profils mesurés**
Résultat :	**Cartographie de $\sigma^\theta(j)$**	**Cartographie de $\sigma_\theta(x,y)a_\theta'(x,y)$ (mais $a_\theta'(x,y)$ est calculable à partir de $a_\theta(x,y,\phi)$)**

IV. TRAVAUX FUTURS

- valider la méthode FBP « adaptée » :
  (simulations et mesures)

- comparer la méthode FBP « adaptée » avec l'approche ART
  (comparer le temps de calcul)

IV. TRAVAUX FUTURS

- valider la méthode FBP « adaptée » :
  (simulations et mesures)

- comparer la méthode FBP « adaptée » avec l'approche ART
  (comparer le temps de calcul)

MERCI DE VOTRE ATTENTION