

La dualité a commencé avec la Transformée par Polaires Réciproques

Jean-Marie BECKER
CPE Lyon &
Lab. H. Curien, Université J. Monnet, St-Etienne

**St-Jean des Vignes,
March 3rd, 2009**

**(remaniement d'un sujet de concours
que j'avais posé en 2005)**

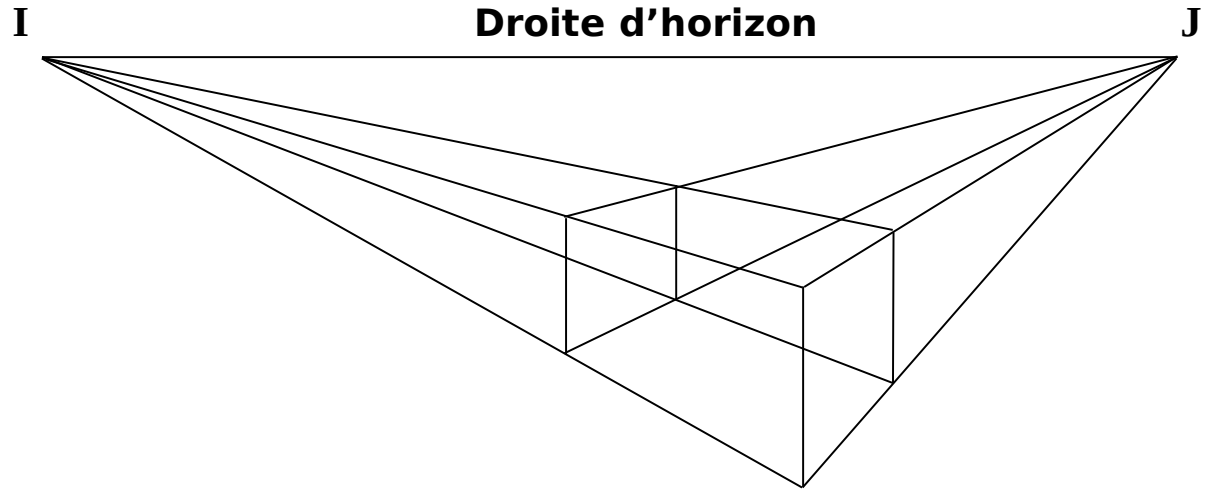
Au début du XIX^{ème} siècle, on distinguait trois sortes de géométries :

- La géométrie classique, dite encore « géométrie pure » ou « géométrie synthétique », restée très fidèle à l'œuvre monumentale d'Euclide, écrite deux mille ans auparavant, les « Eléments », auxquels on adjoignait quelques autres œuvres, parmi lesquelles les « Coniques » d'Apollonius. Il y avait bien des mathématiciens qui sentaient que le corset euclidien craquait en certains endroits, mais toute critique radicale du Maître était déconseillée.**
- La géométrie analytique, véritablement née avec Descartes (milieu XVII^{ème} siècle), qui consistait en un petit arsenal de méthodes algébriques permettant de résoudre, à coups d'équations, une bonne partie des questions posées par la géométrie synthétique.**
- La géométrie « pratique » enseignée dans des cercles restreints ; elle concernait le passage entre la représentation planaire et la réalité tridimensionnelle. Citons deux cas : les règles de perspective (points de fuite, droite d'horizon...) pour les peintres, et les méthodes de construction pour les ingénieurs militaires (fortifications, tailles de pierre...).**

Monge, professeur de Mathématiques dans une Ecole Militaire sous l'Ancien Régime, avait développé une vision novatrice, intégrant les trois géométries ci-dessus. Ayant un talent pédagogique exceptionnel, il fut chargé de définir les programmes de la nouvelle Ecole Polytechnique en 1794. Son influence, directe et indirecte, explique pourquoi cette école militaire a formé une quantité impressionnante de mathématiciens, notamment géomètres, dans ces années-là, au premier rang desquels sont Poncelet et Chasles (promotions 1807 et 1812 de cette école respectivement), mais aussi Cauchy, Liouville, Poisson, Brianchon...



Dessin de Lanzi (vers 1560) représentant une rue de Florence.



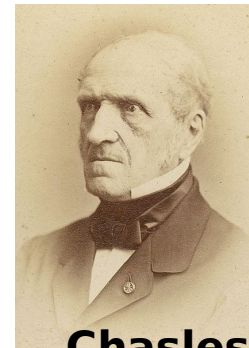
Perspective par « géométrie pure » : les points de fuite I et J peuvent être vus comme « transformés » de points à l'infini.



Monge



Poncelet



Chasles



Plücker

L'histoire de Poncelet a un côté romantique. Officier dans la Grande Armée, il est fait prisonnier en 1812 lors de la retraite de Russie, et retenu derrière les barreaux près de 2 ans. C'est dans ces conditions qu'il crée un corps entier de doctrine, la géométrie projective, renouvelant la géométrie euclidienne en l'englobant dans une perspective plus vaste. A son retour, réintégré dans l'armée comme ingénieur militaire, il n'arrive à terminer son ouvrage « Traité des propriétés projectives des figures » qu'en 1822.

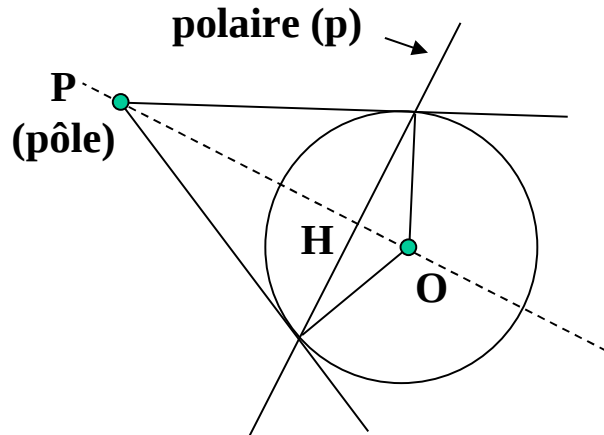
Poncelet organise sa nouvelle géométrie autour de plusieurs idées fondamentales, notamment la notion d'éléments à l'infini (points, droites...), et la fameuse dualité pôles/polaires. Cette dernière permet de définir ce qu'il appelle la « Transformation par Polaires Réciproques », que nous abrégons en « Transformation Polaire » (T.P.), et qui va faire l'objet de notre étude.

Ses idées se répandent comme une traînée de poudre et influencent profondément ses contemporains. A titre d'exemple, l'Académie de Bruxelles propose au concours en 1829 la question suivante « On demande un examen philosophique des différentes méthodes employées dans la géométrie récente et particulièrement de la méthode des polaires réciproques » pour laquelle Chasles reçoit un prix. Sa réponse à ce concours lui donne le noyau d'un ouvrage qui fera date : « Aperçu historique sur le développement des méthodes en géométrie » (1837) dans lequel il développe sa propre vision de la nouvelle géométrie. Chasles pousse plus loin les théories de Poncelet, tout en clarifiant leur exposé ; il donne aussi un second souffle à la géométrie analytique en systématisant l'usage des segments et angles orientés, celui des nombres complexes, etc... (voir « Traité de Géométrie Supérieure » (1852) en rapport avec son cours à la Sorbonne).

La définition de la Transformée Polaire repose sur un certain couplage entre un point (un « pôle ») et une droite (une « polaire ») que nous allons définir d'abord par la géométrie pure, en distinguant 2 cas de figures, selon que le pôle est extérieur ou
intérieur au cercle de référence

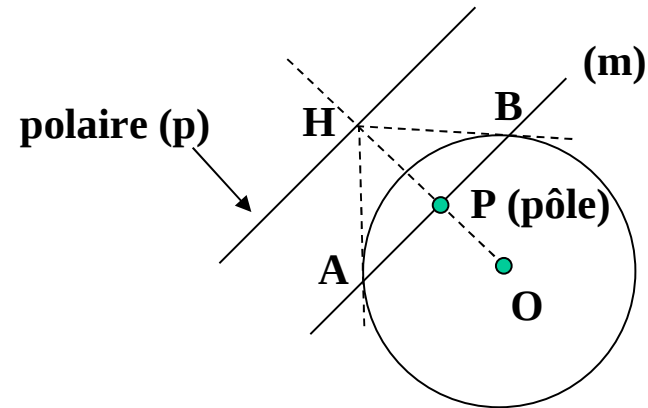
1^{er} cas de figure : P extérieur

Le cas le plus simple : du point P, on mène les tangentes au disque unité. La droite p joignant leurs points de contact est la polaire de P.



2^{ème} cas de figure : P intérieur

Du point P, on mène la perpendiculaire (m) à OP. Elle coupe le cercle en A et B ; les tangentes au cercle en A et B se coupent en H. La polaire p de P est la parallèle à m passant par H.



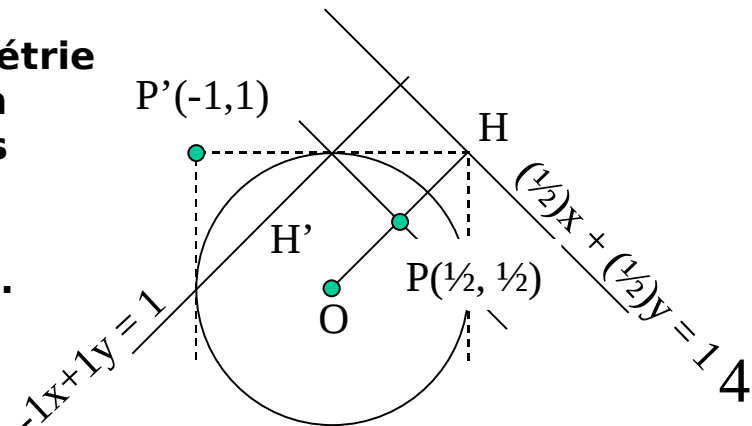
Dans les deux cas de figure, on peut prouver que $OH.OP = 1$. Par suite, si le pôle P s'éloigne de l'origine, sa polaire s'en rapproche. Et vice versa. Cas particulier, si P est sur le cercle sa polaire est la tangente au cercle.

Ce que nous venons de décrire en termes de géométrie pure (point de vue de Poncelet) peut s'exprimer en géométrie analytique (point de vue de Plücker, dès 1835) : on apparie

le point (a_1, a_2)  la droite d'éq. $a_1x + a_2y = 1$.

(dualité vis-à-vis du cercle unité).

Avantage immédiat, on n'a plus à distinguer deux cas de figure. Voir exemple ci contre.



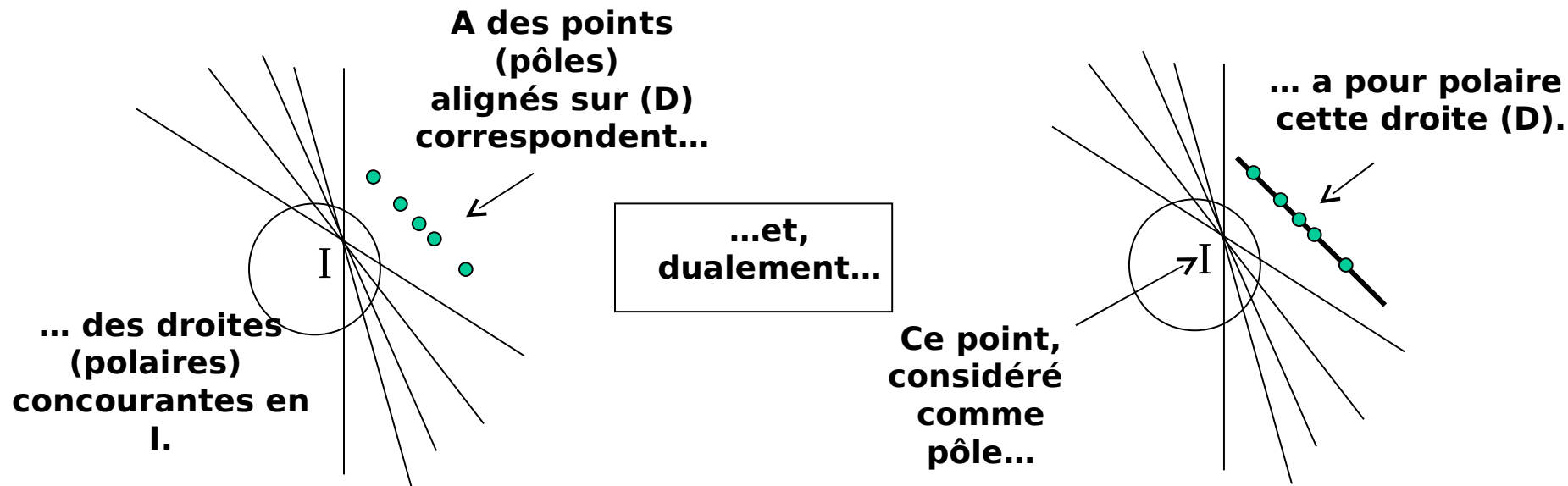
Un premier résultat (immédiat en raisonnant sur $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$) est le suivant:
La polaire de A passe par B si et seulement si la polaire de B passe par A.
(on dit alors que A et B sont conjugués par rapport au disque unité).

Corollaire fondamental :

la T.P. échange alignement de points (pôles) et intersection de droites (polaires).

Les deux schémas ci-dessous illustrent ce corollaire, typique de la dualité.

La figure de gauche montre le passage direct des points alignés vers le point d'intersection I. Celle de droite illustre le chemin inverse : du point I vers sa droite polaire... qui n'est autre que la droite d'alignement.



Intérêt pratique : à un alignement *approximatif* de points est associé un point d'intersection *approximatif* de leurs polaires ; en prenant la polaire de ce point, on obtient une droite d'alignement *idéale* des points initiaux.

On a ainsi bâti une technique alternative à la « méthode des moindres carrés ».

Rappelons maintenant ce que l'on entend par « enveloppe » d'une famille de droites ; il s'agit d'une courbe ayant ces droites comme ensemble de ses tangentes.

Remarque : n'importe quelle famille de droites ne génère pas nécessairement une enveloppe ; algébriquement parlant, le phénomène d'enveloppe apparaît lorsque les droites de la famille ont des équations de la forme $a(t)x + b(t)y = 1$, où les fonctions a et b sont dérivables. Dans les cas usuels, le point « courant » $M(x,y)$ de l'enveloppe est le point d'intersection de 2 droites « très voisines », autrement dit solution du système :

$$a(t)x + b(t)y = 1$$

$$a(t+dt)x + b(t+dt)y = 1$$

Par soustraction de ces équations et division par dt , (x,y) est solution du système équivalent :

$$a(t)x + b(t)y = 1$$

$$a'(t)x + b'(t)y = 0$$

D'où

$$x = b'(t) / d(t)$$

$$y = -a'(t) / d(t)$$

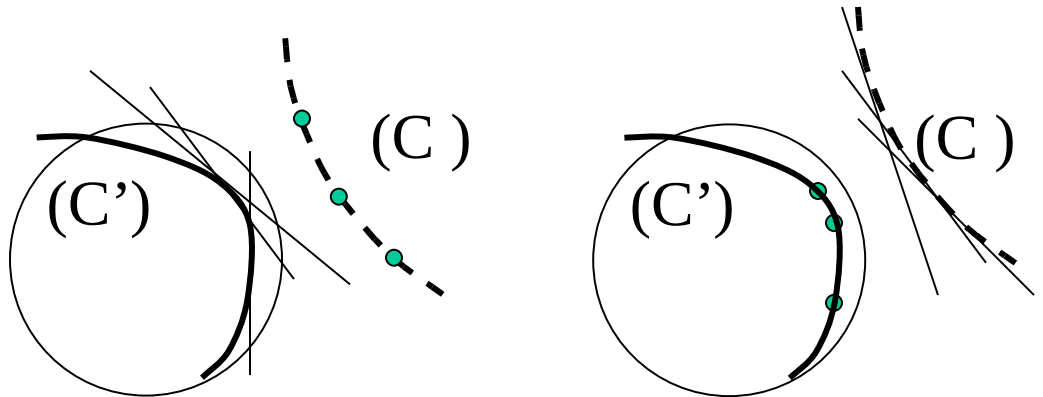
(*)

avec

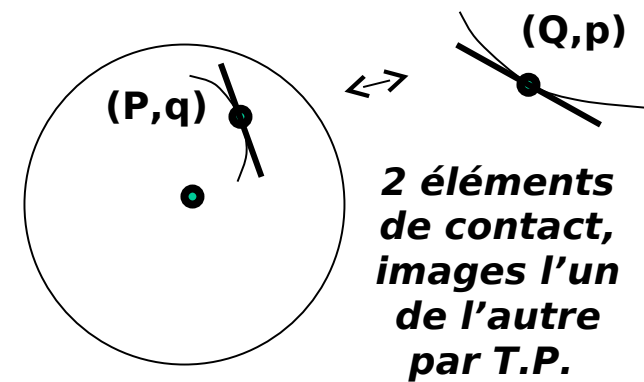
$$d(t) = ab' - a'b$$

Par suite, si une courbe (C) est dérivable par morceaux, la famille de droites constituée par les polaires de ses points enveloppe une certaine courbe (C') que l'on appelle la Transformée Polaire (T. P.) de la courbe (C) . Voir schéma ci-dessous.

Dualement, (C') , considérée comme ensemble de ses points, a pour enveloppe des polaires de ses points, c'est-à-dire pour T.P. la courbe (C) . La T.P. est donc involutive (est sa propre inverse), ce que l'on peut vérifier analytiquement (excellent exercice)



Remarque : La transformation de courbes par T.P. peut-être comprise d'une autre manière : on peut considérer que la T.P. agit dans l'espace des « *éléments de contact* », en appelant ainsi les couples (P,q) constitués par un point P et une droite q passant par ce point. Sur la figure, on a visualisé 2 tels couples (P,q) et (Q,p) où p (resp. q) est la polaire de P (resp.Q).



Théorème (admis) : *la T.P. d'une conique est une conique.*

Toutefois, le genre (ellipse, parabole, hyperbole) peut être modifié par la T.P.

Cela se démontre en appliquant les formules (*) précédentes à la représentation paramétrique générique des coniques qui est de la forme :

$$\begin{aligned} x &= (at^2 + bt + c) / D(t) \\ y &= (dt^2 + et + f) / D(t) \end{aligned} \quad \text{où} \quad D(t) = gt^2 + ht + 1$$

(a, b, ... h sont des constantes ; si $g = h = 0$, il s'agit d'une parabole).

Corollaire (bon exercice également) :

La T.P. d'un cercle est une conique dont l'origine est un foyer.

Prenons un exemple concernant ce dernier résultat.

Le cercle (C) décrit par le point :

$$x(t) = 2 / D \quad \text{et} \quad y(t) = 2t / D \quad \text{avec} \quad D = t^2 + 1$$

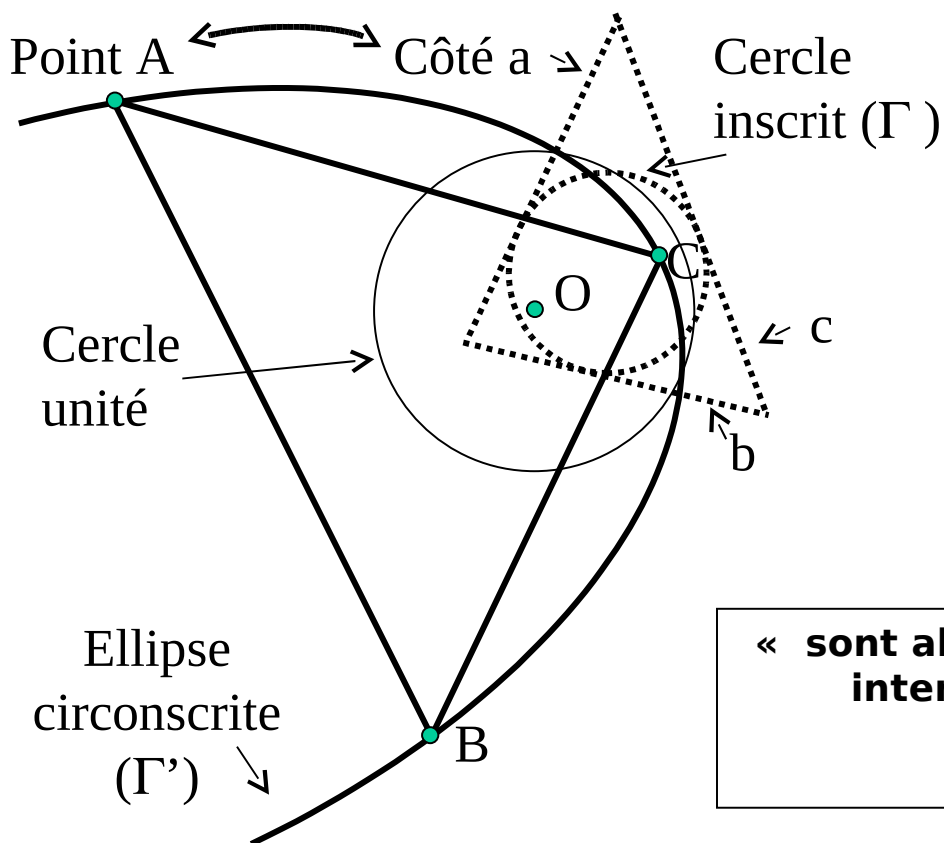
a pour T.P. la courbe (C') d'équations :

$$x(t) = (1 - t^2) / 2 \quad \text{et} \quad y(t) = t$$

(C') est donc une parabole ayant l'origine pour foyer.

La figure suivante illustre un autre cas de T.P. d'un cercle.

Un exemple de dualité de figures



Convenons de noter un point (pôle) et sa polaire (droite duale) par la même lettre, en majuscules et en minuscules respectivement.

Etant donnés trois points A, B, C, - leurs trois polaires a, b, c forment le « triangle conjugué » de ABC, - le cercle inscrit dans abc, (Γ), a pour image une ellipse circonscrite à ABC, de foyer O.

C'est un exemple d'échange par dualité, entre la figure en pointillés et la figure en traits pleins, avec le « dictionnaire » suivant :

« sont alignés »	« ...par intersection de... »	« se coupent »
« inscrit »	« circonscrit »	« ... en joignant... »
« conique »	« conique »	« conique »

Etc ...

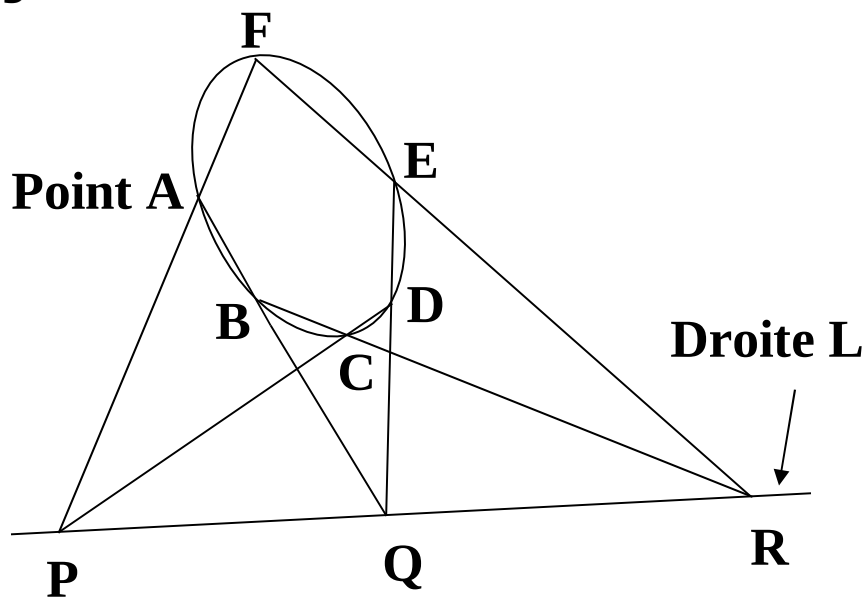
L'une des meilleures illustrations de la dualité est donnée par les deux théorèmes de Pascal et de Brianchon que nous allons voir à la page suivante.

Supposons par exemple que nous ayons démontré le théorème de Pascal ; le théorème dual est celui qui s'énonce par « création automatique d'énoncé » à l'aide du dictionnaire précédent ; et on dira qu'il est démontré « par dualité », ce qui, en ce début du XIX^{ème} siècle, constituait une toute nouvelle façon de raisonner.

Les Théorèmes de Pascal et de Brianchon sont duaux l'un de l'autre :

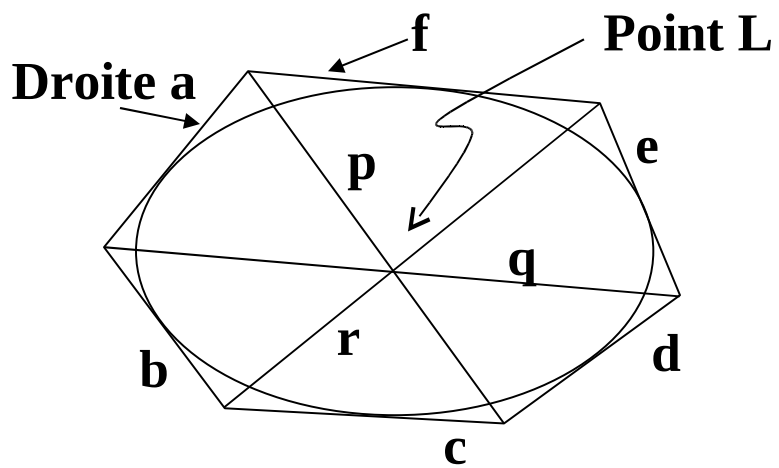
Th. de Pascal (1640)

Un hexagone ABCDEF est inscrit dans une conique si et seulement si les 3 points P, Q, R obtenus par intersection des paires de côtés opposés de l'hexagone sont alignés.



**Th. de Brianchon (1806)
(énoncé dual)**

Un hexagone abcdef est circonscrit à une conique si et seulement si les 3 droites p, q, r, obtenues en joignant les sommets opposés de l'hexagone sont concourantes.



**Au fait, où est le disque unité ? On n'en a tout simplement plus eu besoin !
Le « dictionnaire » de la dualité mentionné ci-dessus remplace tout ; il est peu important de réaliser la dualité d'une façon plutôt qu'une autre ; ainsi, Chasles écrit vers 1850 que « la méthode de Poncelet était la seule qui servit alors aux transformations et par laquelle on pût justifier ce principe de dualité. Cependant, il existe divers autres procédés [...] donnant lieu au même principe de dualité ».**

La T.P. a permis notamment à Plücker (années 1830) de dégager des propriétés remarquables des cubiques, courbes ayant une équation algébrique de degré global 3. Illustrons ceci sur la deltoïde Δ (famille des hypocycloïdes) d'équations

$$x = (1 - t^2)/D \quad ; \quad y = (2t^3/ D) - 1 \quad \text{avec} \quad D = (1 + t^2)^2 .$$

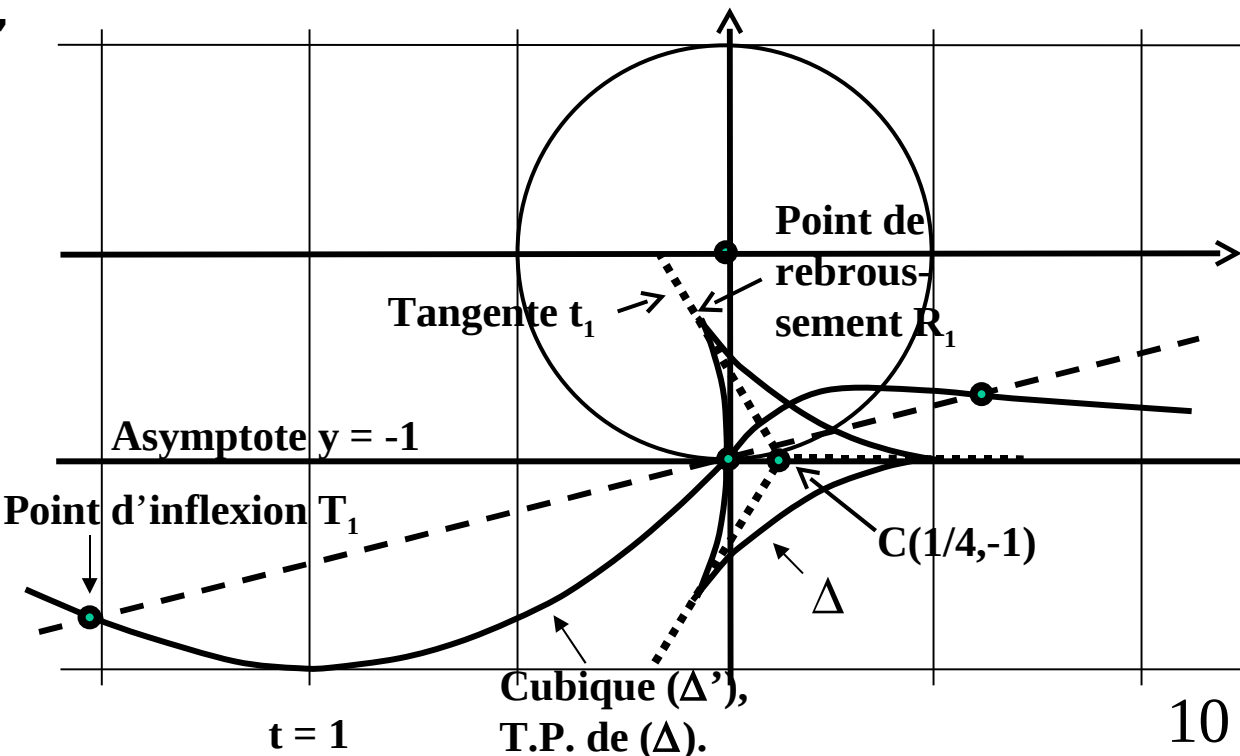
En utilisant (*), on obtient les équations paramétriques suivantes pour l'image (Δ') de Δ par la T.P. (enveloppe des polaires des points de (Δ)) :

$$x = t (t^2 + 1) / E \quad ; \quad y = (t^2 + 1) / E \quad \text{avec} \quad E = - t^2 + t - 1 \text{ (on remarquera que } t = x/y \text{)}$$

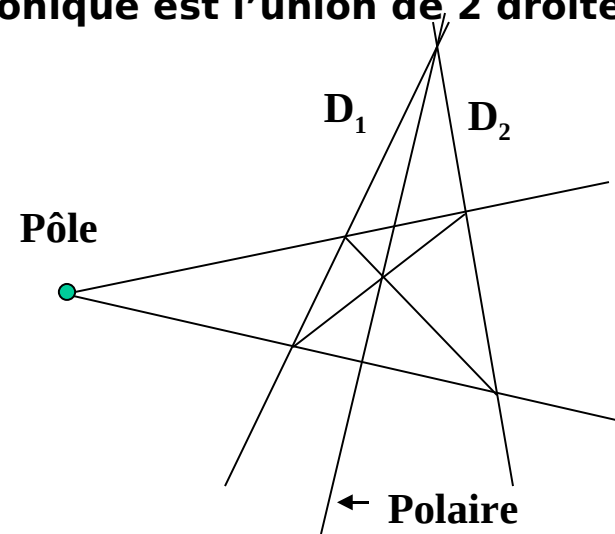
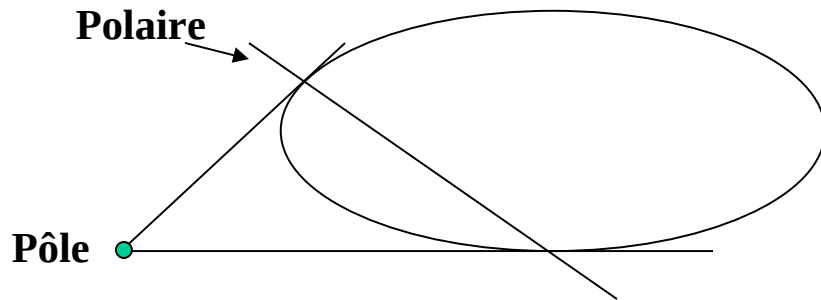
On peut en déduire une équation implicite de (Δ') : $(1 + y) (x^2 + y^2) - x y^2 = 0$. C'est donc une cubique.

Les 3 tangentes (t_k) de (Δ) en les points de rebroussement R_k (en pointillés) ont un point commun C (centre de Δ) ; leurs pôles T_k sont par conséquent des points d'inflexion de (Δ') , et sont alignés, ce qui est une propriété remarquable qu'on vient d' établir par dualité. Par dualité également, on déduit que (Δ') a une asymptote.

En se fondant initialement sur ce type d'exemples, Plücker a obtenu, pour des courbes de degré n, des formules générales reliant n et différentes sortes de paramètres. Ces paramètres sont le nombre de tangentes doubles, de points d'inflexion, etc.... Ces formules ont donné un nouvel élan à la théorie des courbes algébriques.



Différentes sortes d'extensions de la T.P. sont possibles. D'abord, en restant dans le plan, rien n'oblige à faire référence au cercle unité ; ce peut être un cercle quelconque, ou, solution plus souple encore, n'importe quelle conique (voir les deux exemples ci-dessous ; dans le deuxième, la conique est l'union de 2 droites D_1 et D_2).



La T.P. s'étend également à l'espace, avec la sphère unité (S) et la correspondance point-plan : (a,b,c) en correspondance avec le plan d'équation $ax + by + cz = 1$.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur cette Transformation Polaire, qui a catalysé l'essor de la nouvelle géométrie dans la première moitié du XIX^{ème} siècle ; elle a permis l'évolution des points de vue et donnant accès à la notion, plus abstraite, de dualité générale, laquelle a connu au XX^{ème} siècle son plein essor, dans le cadre de l'algèbre linéaire.

Entretemps, elle avait beaucoup été oubliée. Mais, depuis quelques années, notamment parce que la génération de courbes par enveloppe se prête bien à certains traitements d'images, on en a redécouvert l'intérêt et – le mot n'est probablement pas exagéré – la beauté. Un peu comme on redécouvre la beauté plastique du noir et blanc après des décennies de règne de la couleur.

Souhaitons à la Transformation Polaire une belle deuxième vie.

Références biblio et webographie

1) Pour la T.P. (Transformée par Polaires Réciproques) :
« Initiation à la Géométrie » de Daniel LEHMANN et Rudolphe BKOUCHE, Presses Universitaires de France, 1988.

Ce livre est excellent à tous points de vue.

2) Pour les cubiques :

<http://mathworld.wolfram.com/CubicCurve.html>

<http://demonstrations.wolfram.com/PlaneCubicCurves/>

En direction des courbes elliptiques et de la cryptographie :

<http://people.maths.oxford.ac.uk/~szendroi/cubic.pdf>

3) Concernant Plücker et ses « formules » :

<http://serge.mehl.free.fr/chrono/Plucker.html>

Ainsi que le « site » :

<http://rigtriv.wordpress.com/2008/08/05/plucker-formulas/>

4) Ne pas manquer de regarder le commentaire que fait Charlotte Angas Scott, en 1897 (Vol 4, Number 3, pp 121-126) dans le Bulletin of the American Mathematical Society, à l'occasion de la publication des Œuvres complètes de Plücker :

<http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183415152>

(Avec un éclairage sur l'incompréhension entre Poncelet et Plücker).

(toutes les liens cités étaient actifs en Mars 2009)