

Reconstruction tomographique à partir des données incomplètes en 2D

OULD MOHAMED Moctar-Salem

Rolf Clackdoyle et Catherine Mennessier

Plan de l'exposé

1. Données tomographiques

2. Problème tomographique

3. Solution classique

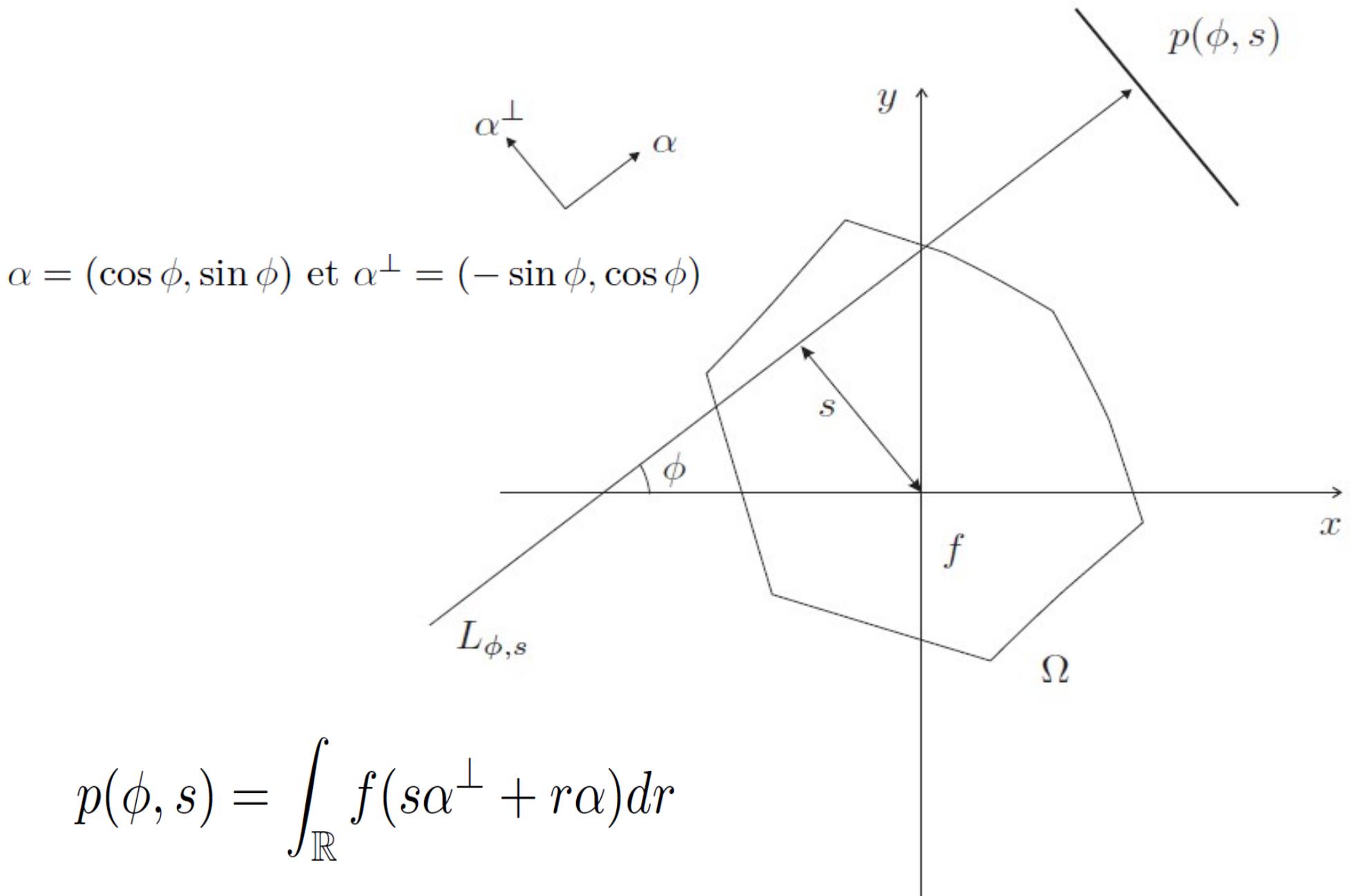
4. Données incomplètes

5. Méthode de la (DBP)

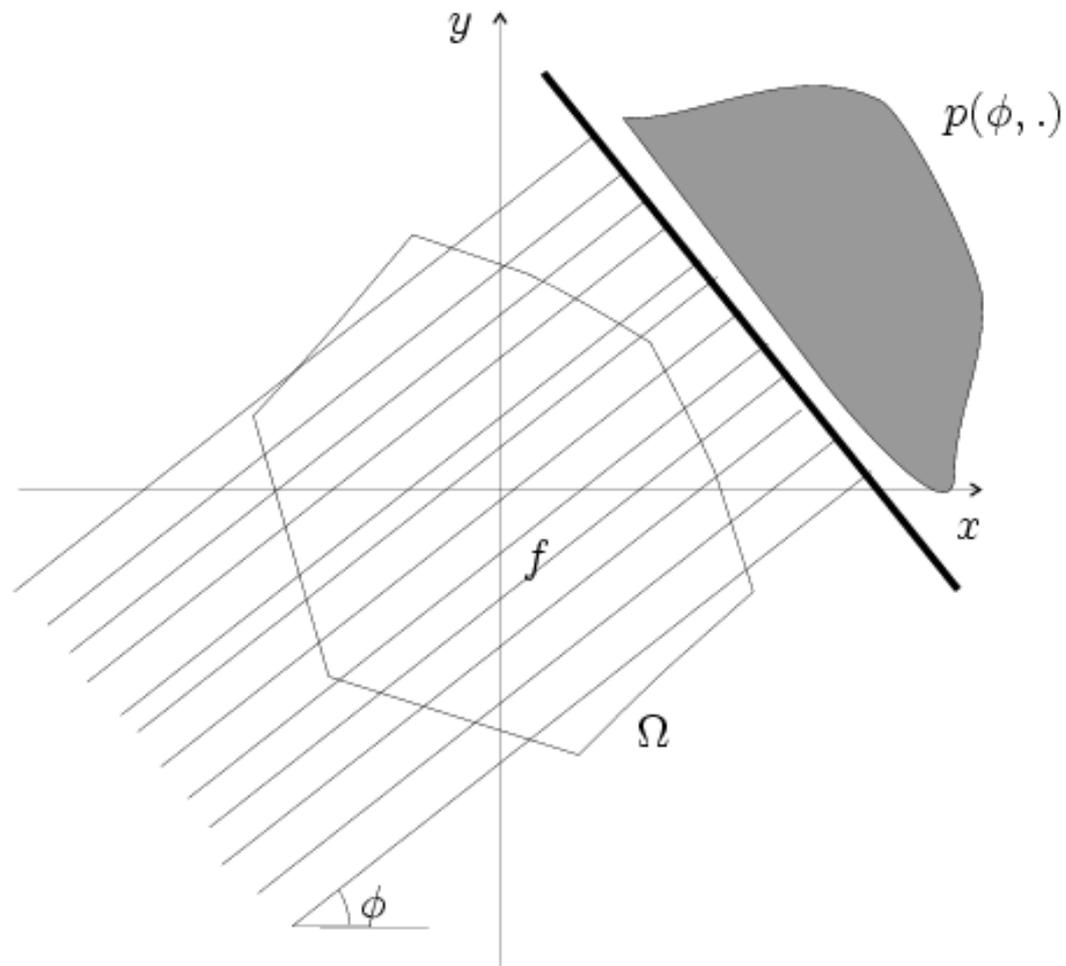
6. Méthode du fanbeam virtuel

7. Comparaison des deux méthodes

Projections parallèles

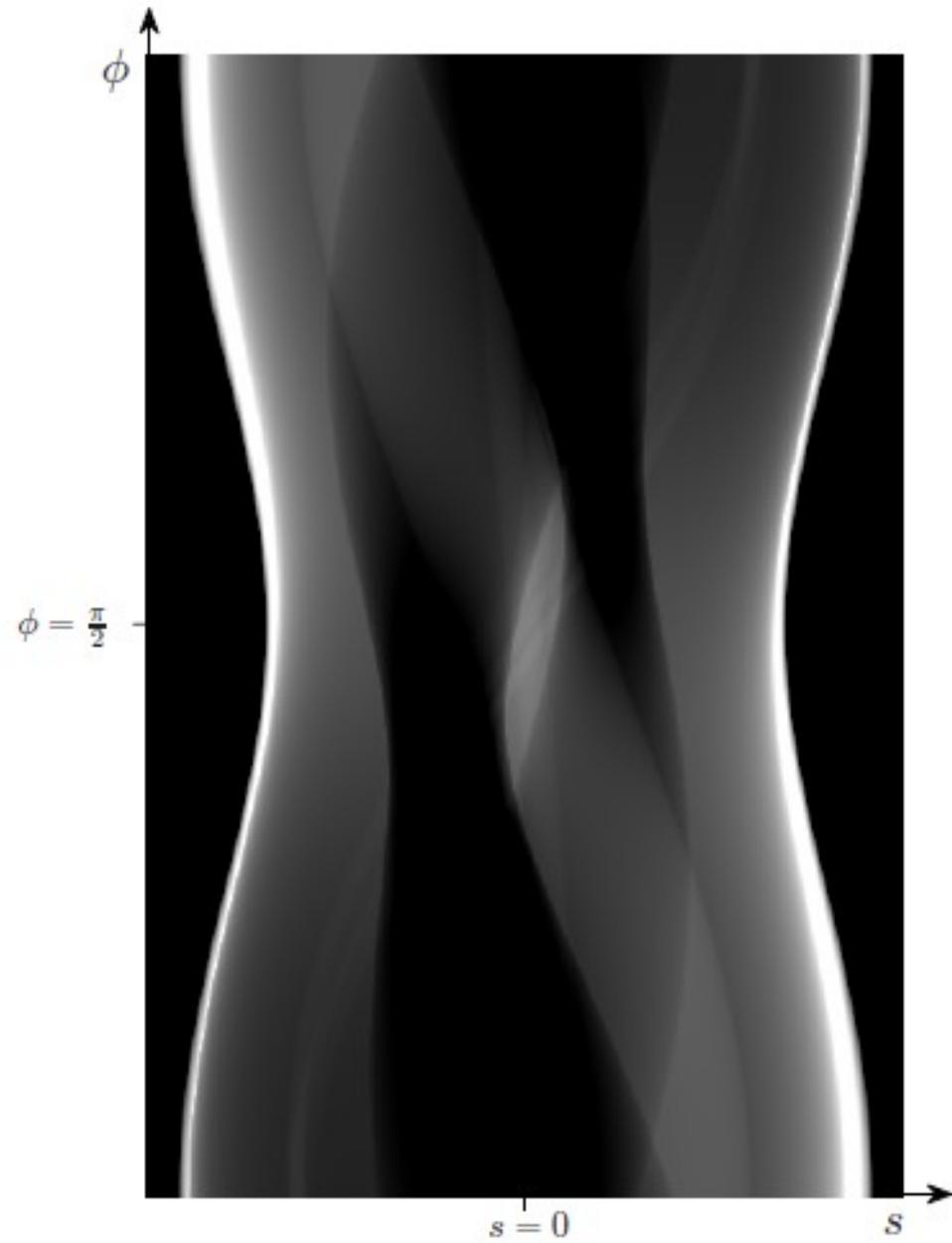
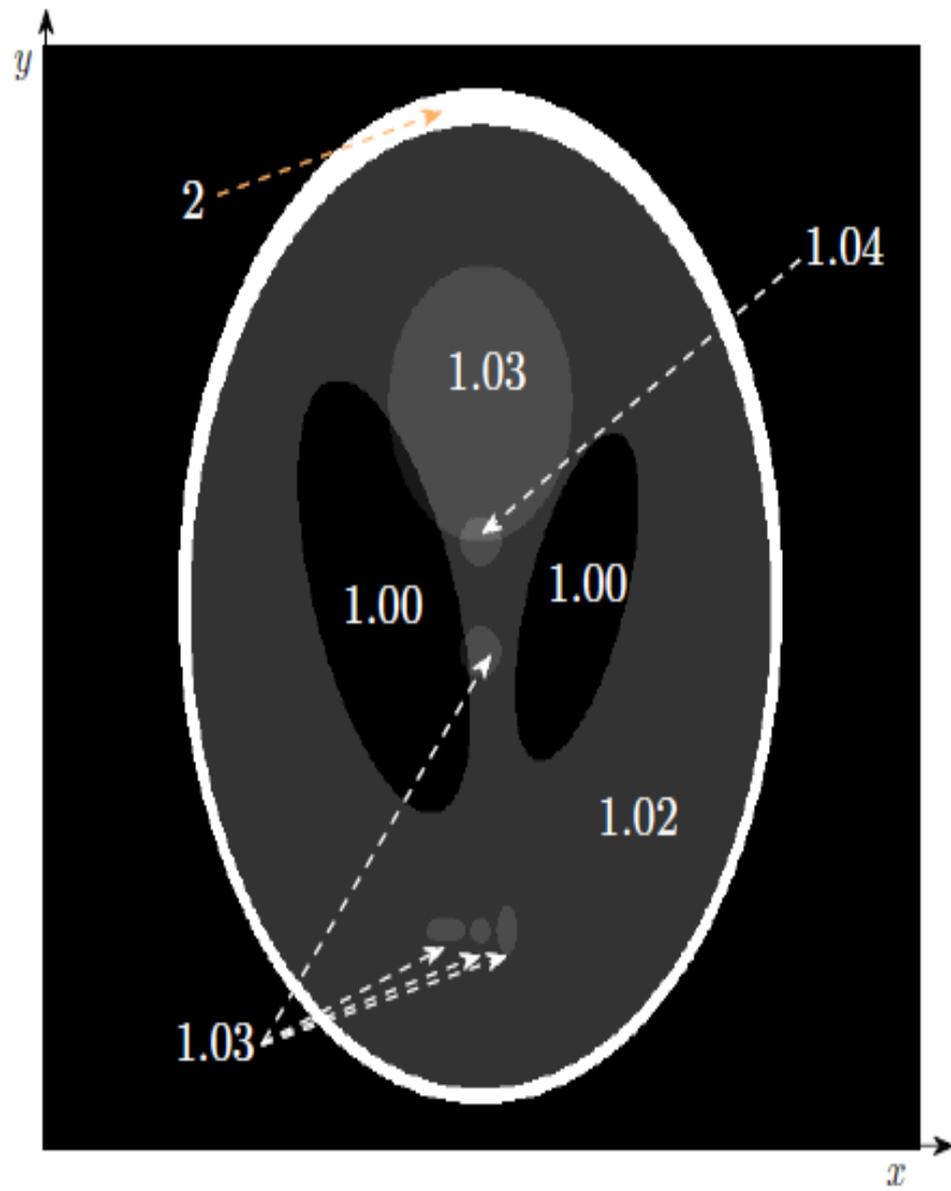


Projections parallèles



Les projections constituent l'ensemble de données du problème tomographique.

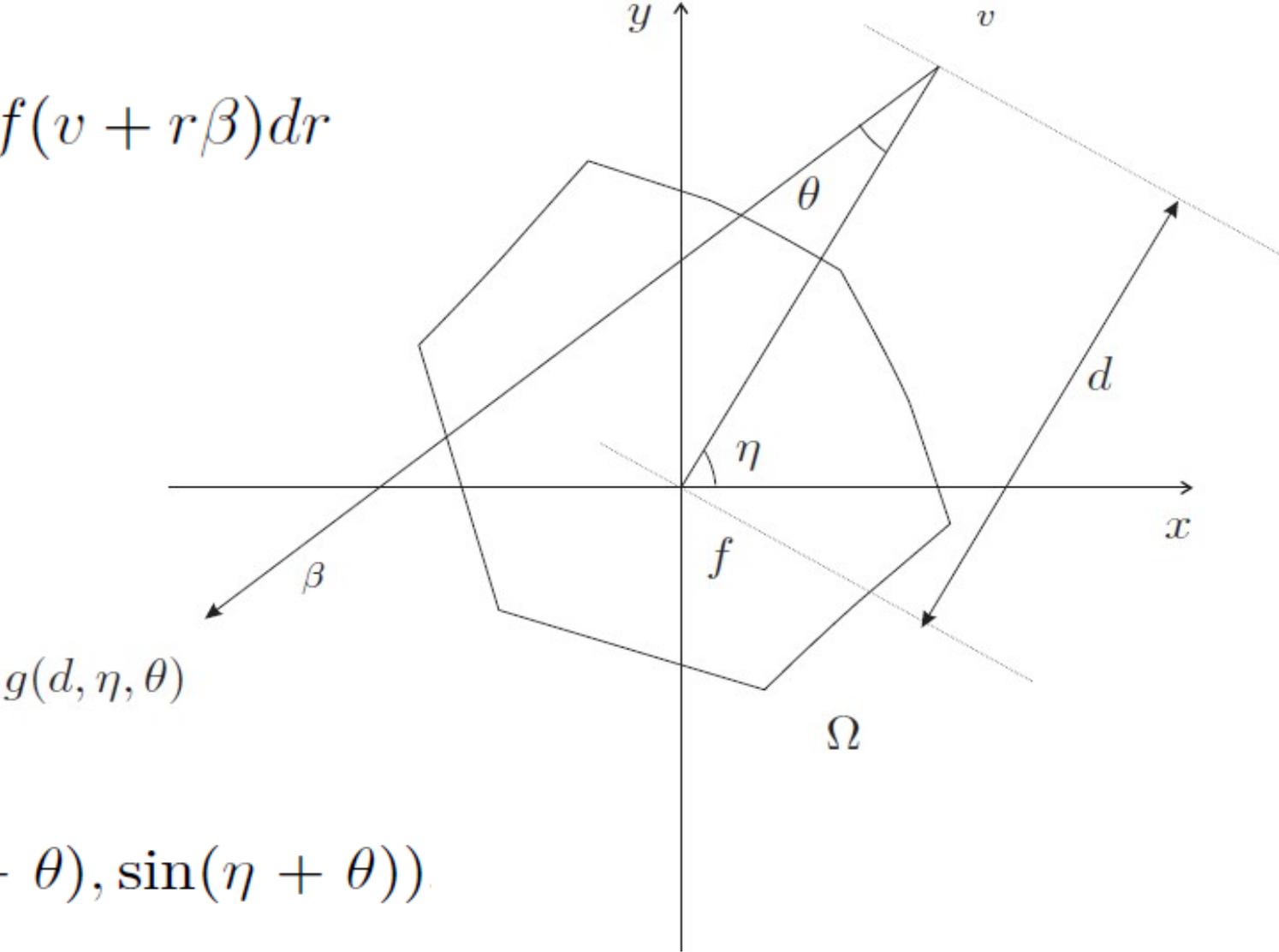
Sinogramme



Le célèbre fantôme de Shepp-Logan et son sinogramme

Projections fanbeam

$$g(d, \eta, \theta) = \int_0^\infty f(v + r\beta) dr$$



$$\beta = -(\cos(\eta + \theta), \sin(\eta + \theta))$$

2. Problème tomographique

Trouver la fonction f à partir de ses projections.

3. Solution classique

(Filtered BackProjection, FBP)

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s} [p_H(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$

$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds',$$

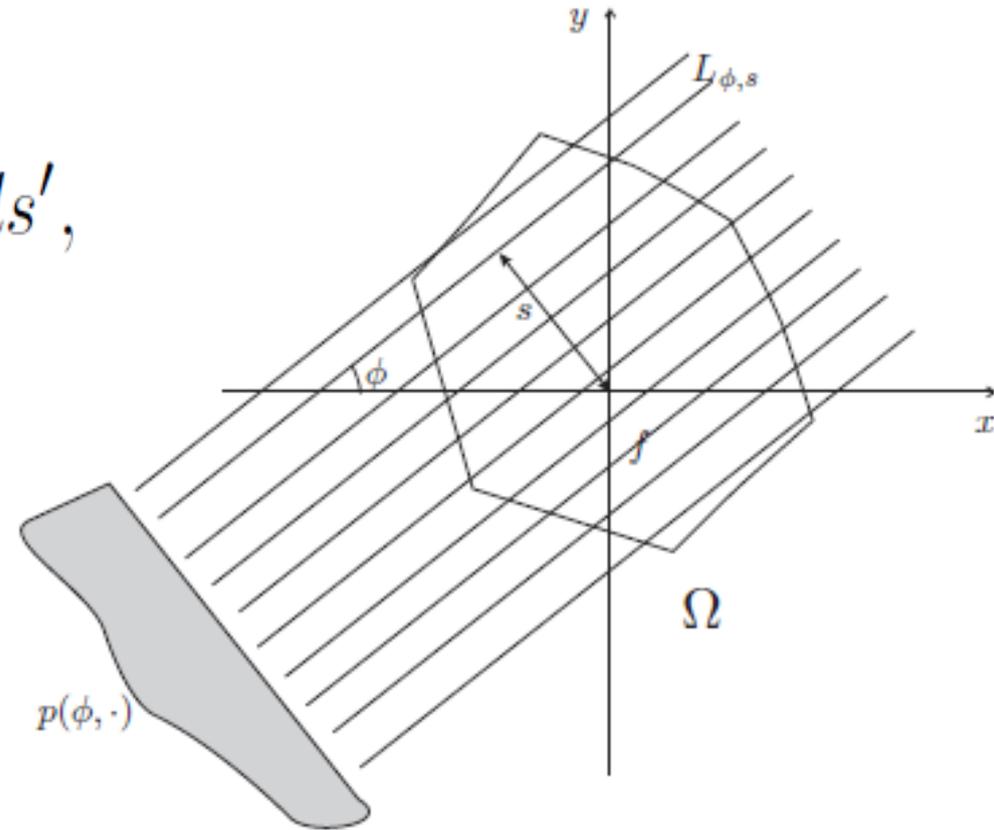
$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

Filtrage+dérivation+rétroprojection

Filtrage : Transformée de Hilbert en géométrie parallèle

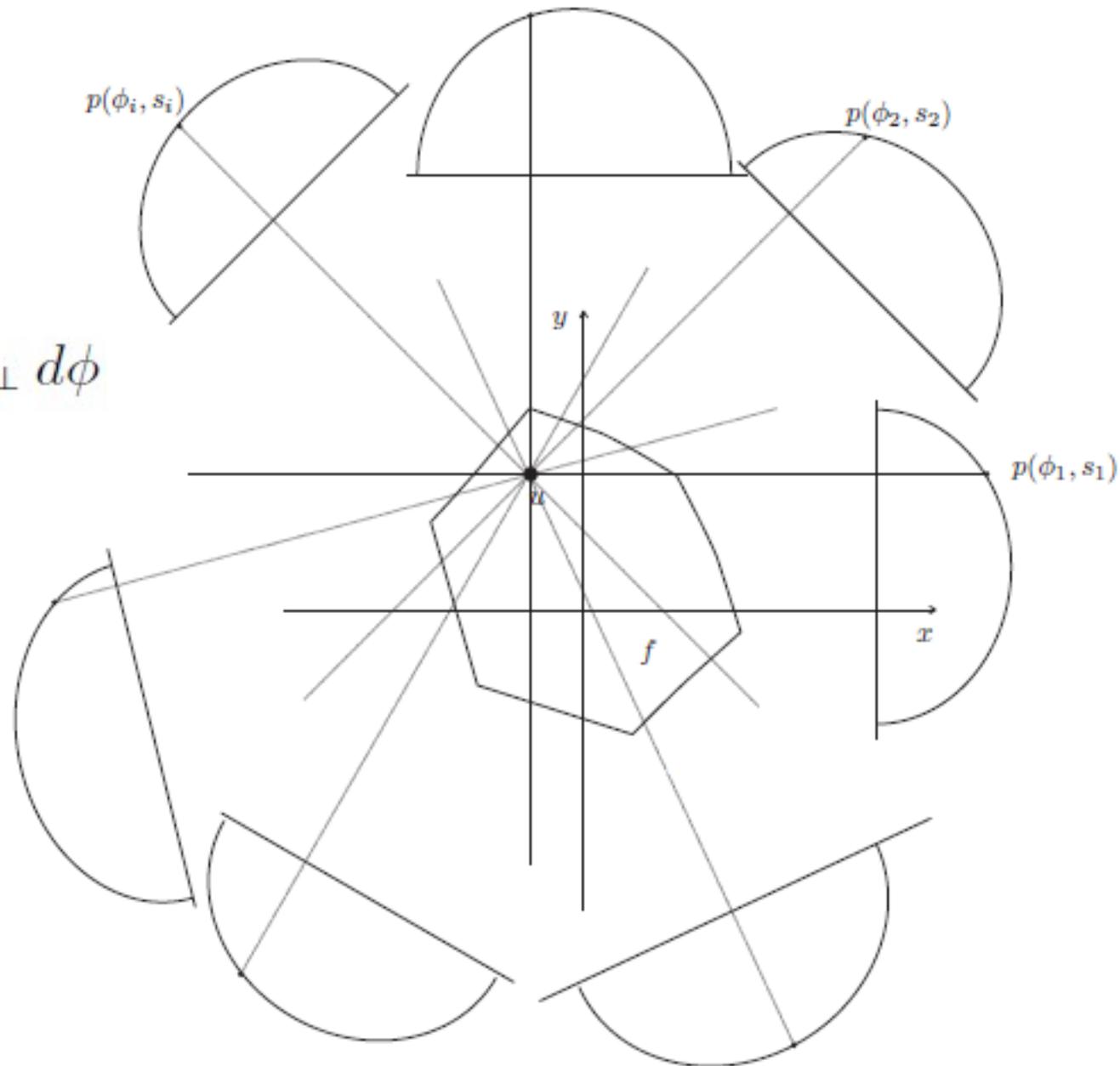
$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds',$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$



Rétroprojection

$$b(u) = \int_0^\pi [p(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$



4. Données incomplètes

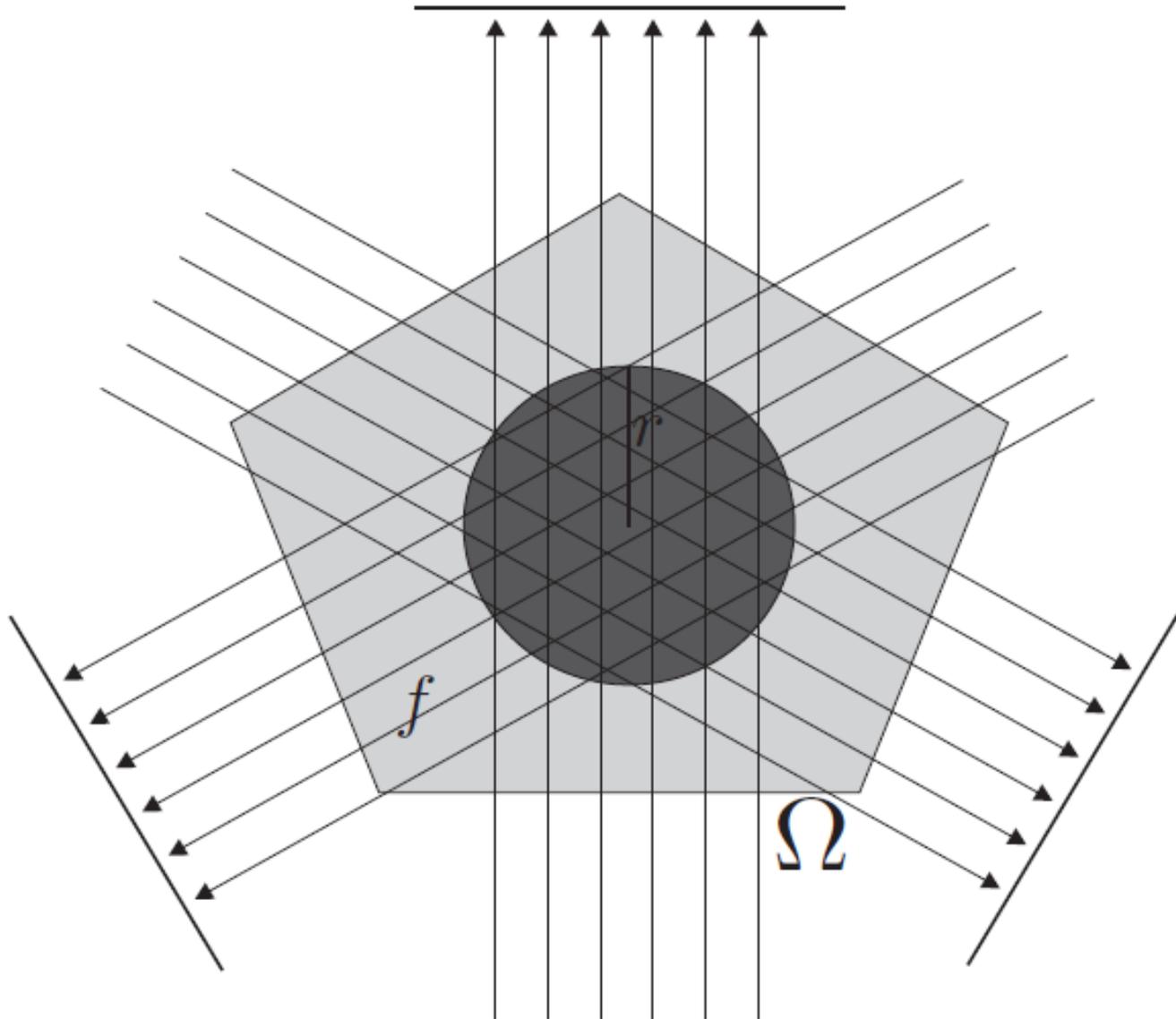
$$E_{trc} = \{(\phi, s) \in Z, p(\phi, s) \text{ est inconnue} \}$$

$$E_{trc}^{\circ} \neq \emptyset$$

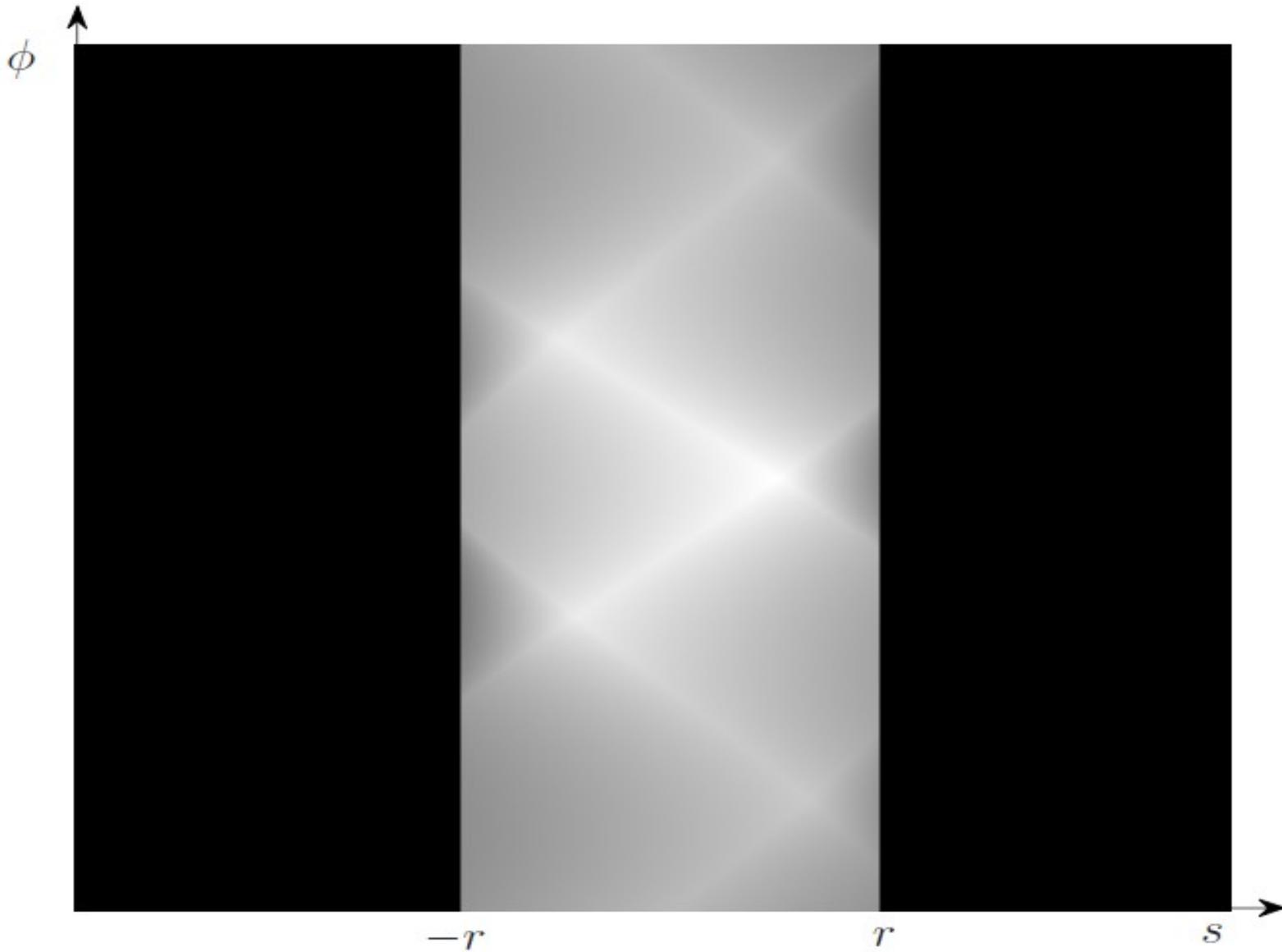
Existe-t-il une partie reconstructible ? Où se trouve-t-elle ?

Exemples classiques

Problème intérieur

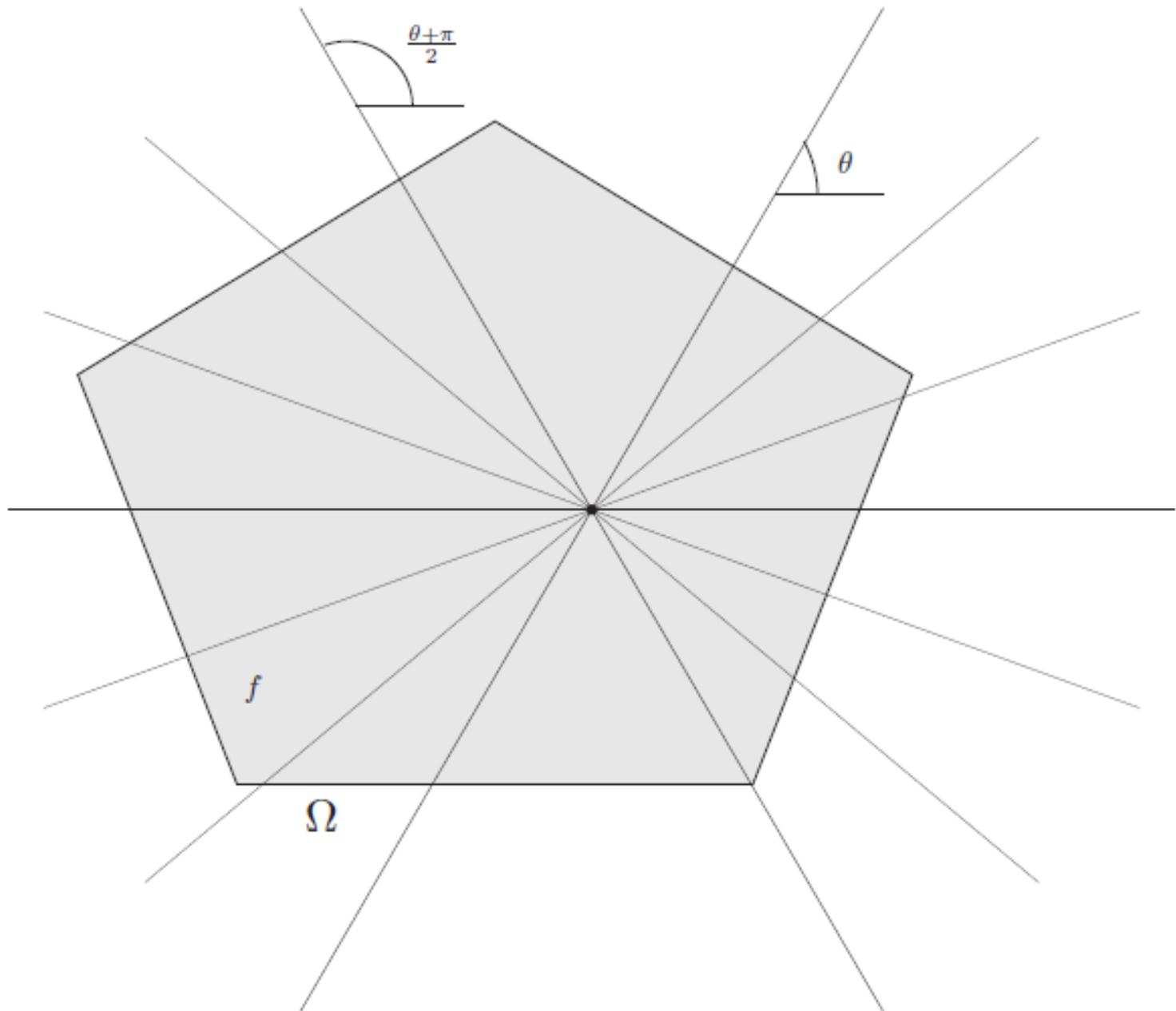


Problème intérieur

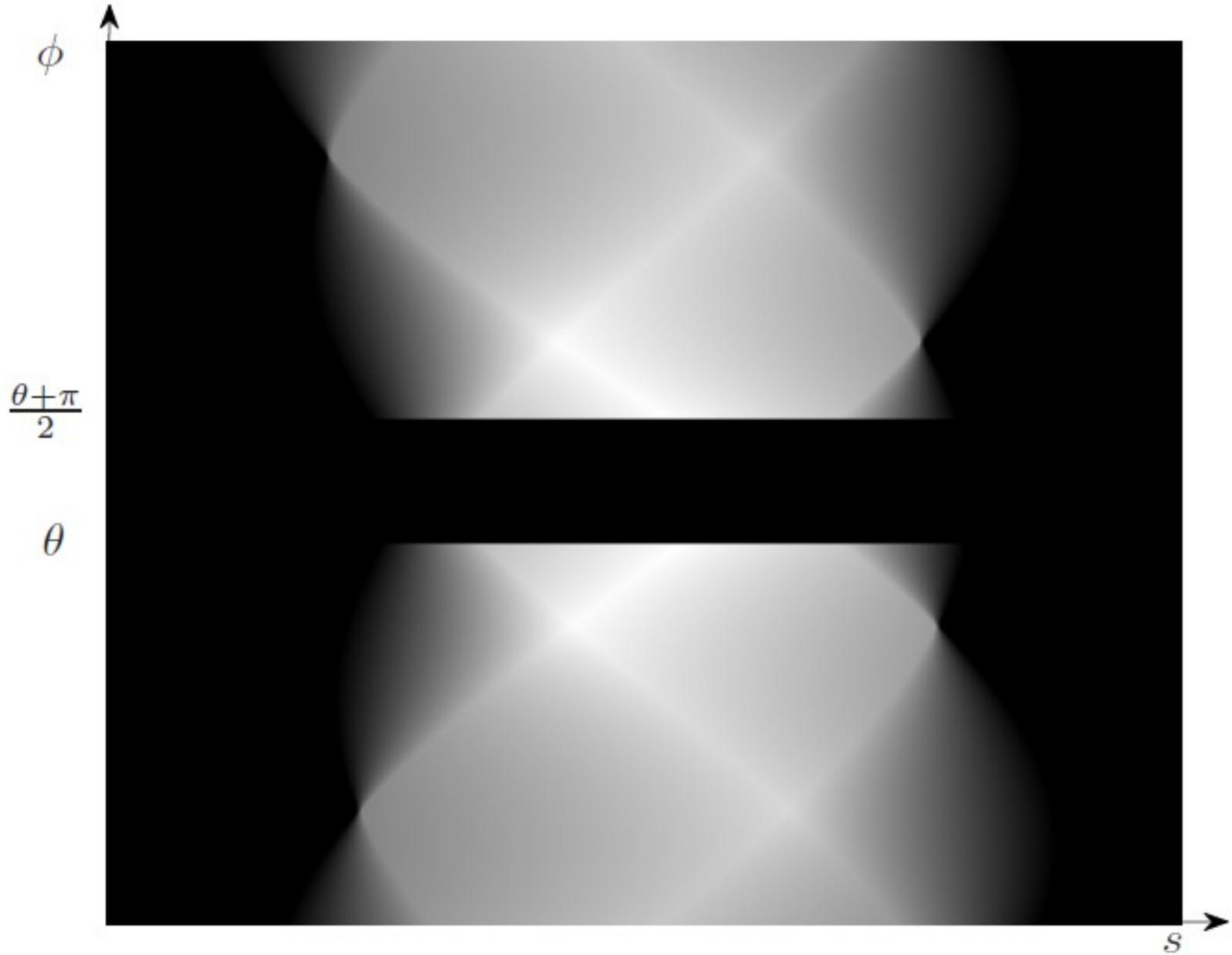


Pas d'unicité de solutions dans ce cas [Nat86].

Problème à angle de vue limité

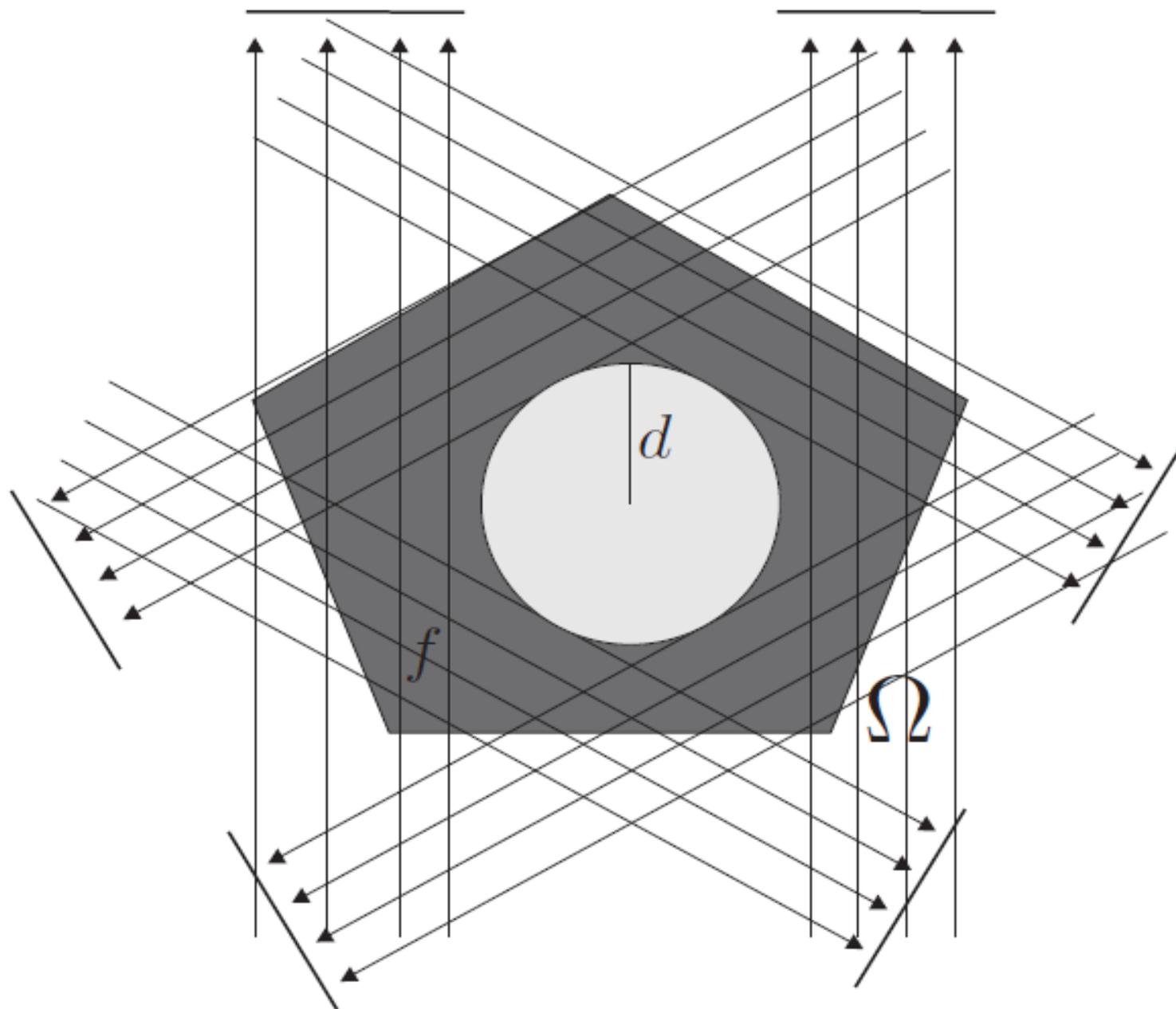


Problème à angle de vue limité

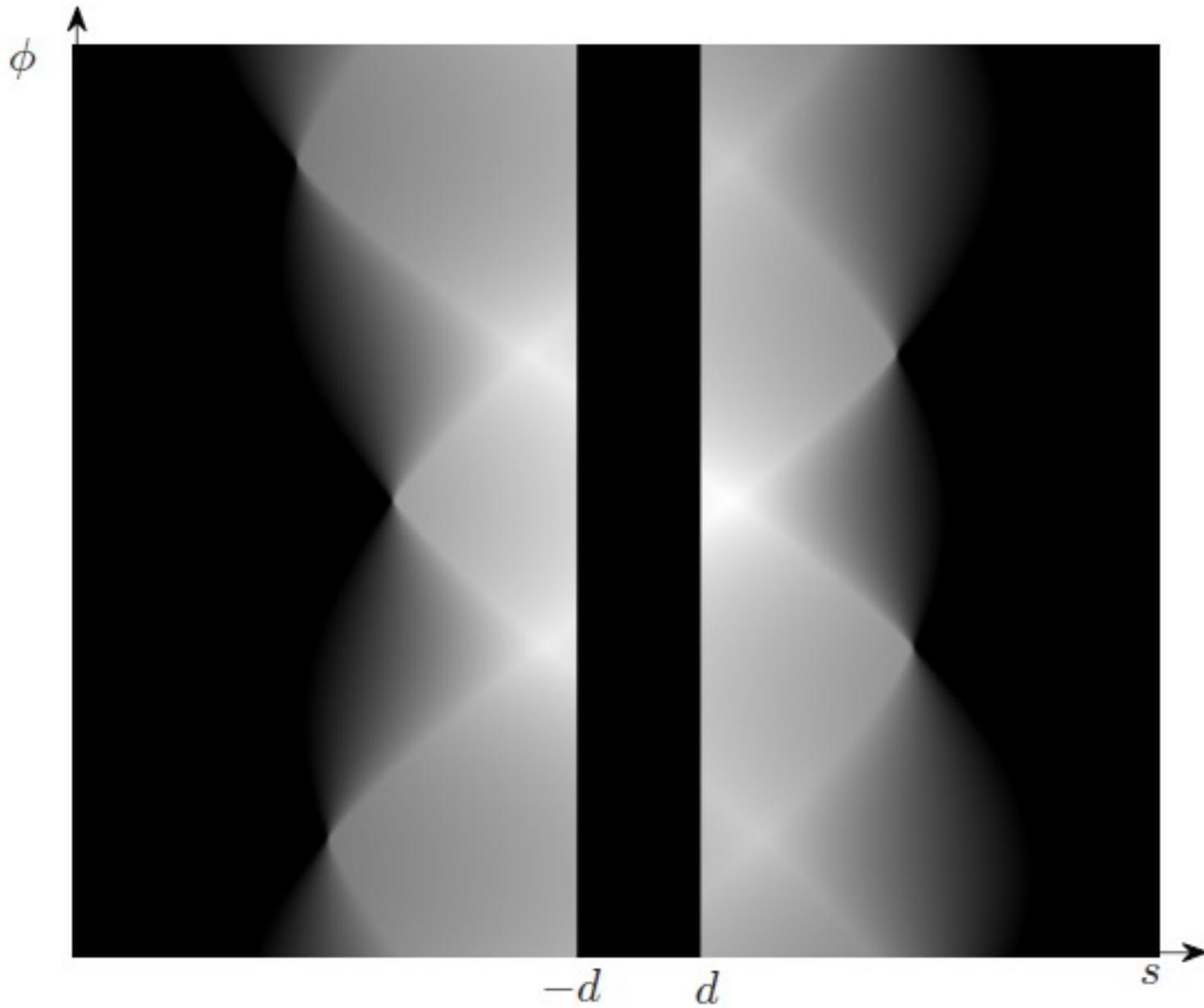


Pas de stabilité pour la solution [Nat86]

Problème extérieur



Problème extérieur



Pas de stabilité pour la solution [Nat86]

Données incomplètes quelconques

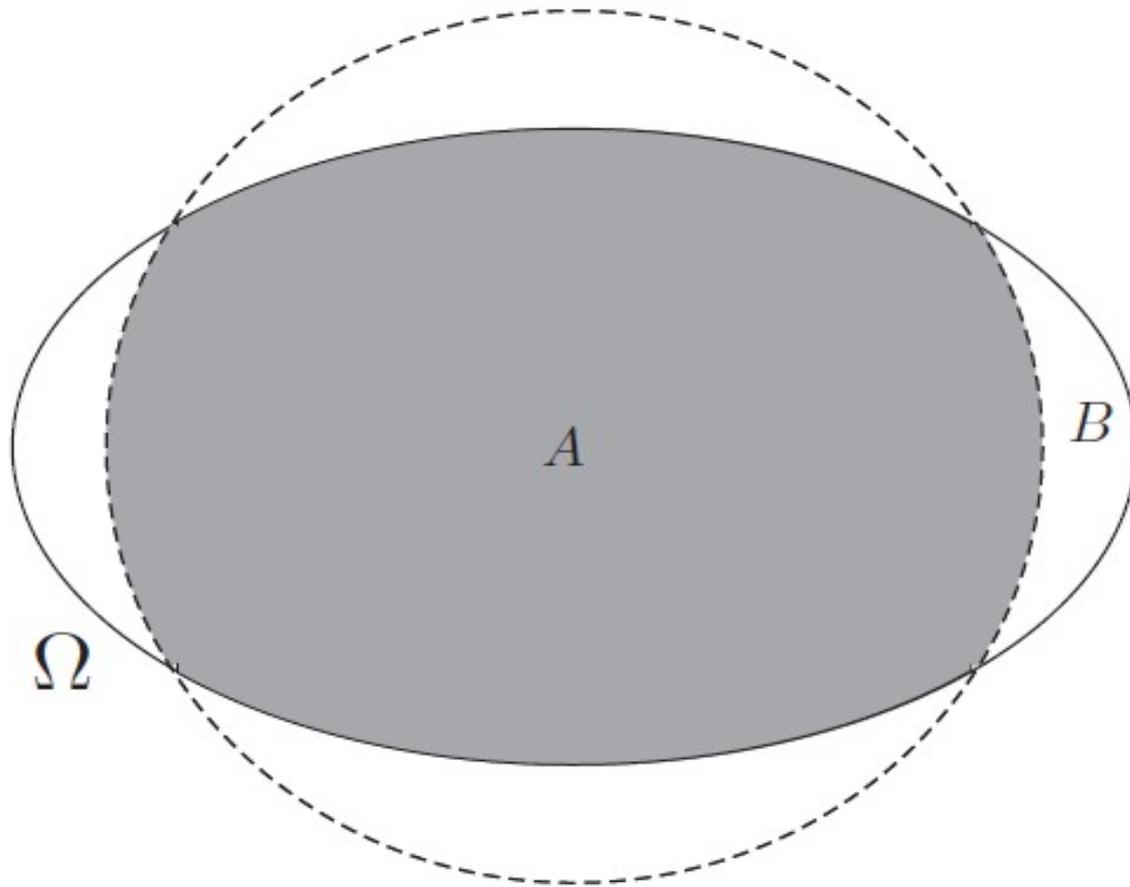
Régions A et B

Le support de f est Ω

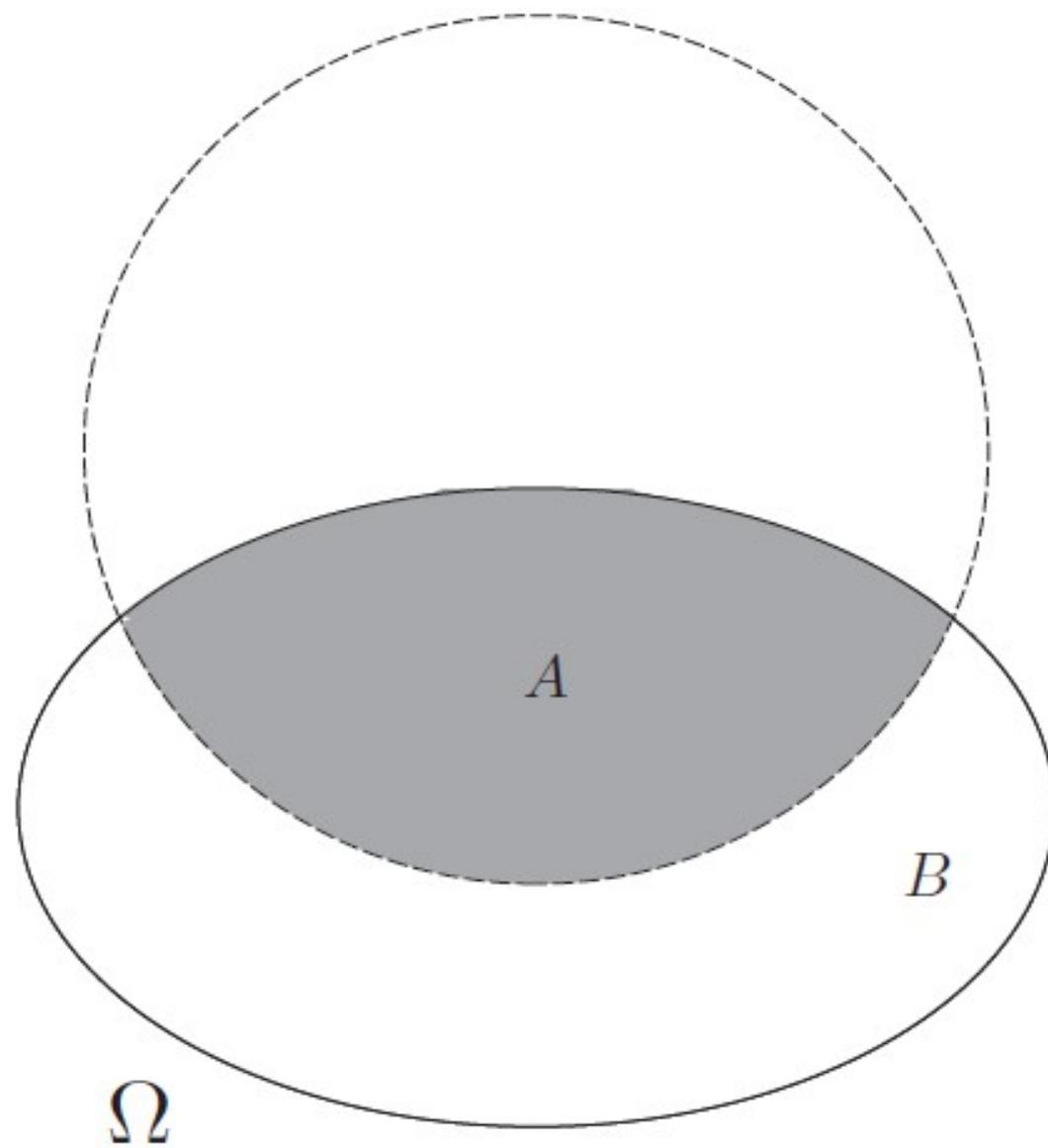
$$A = \Omega \setminus B$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \Omega : \exists (\phi, s) \in E_{trc}^{\circ} \text{ tel que } (x, y) \in L_{\phi, s} \right\}$$

Exemples des régions A et B



Exemples des régions A et B



5. Méthode de la (DBP)

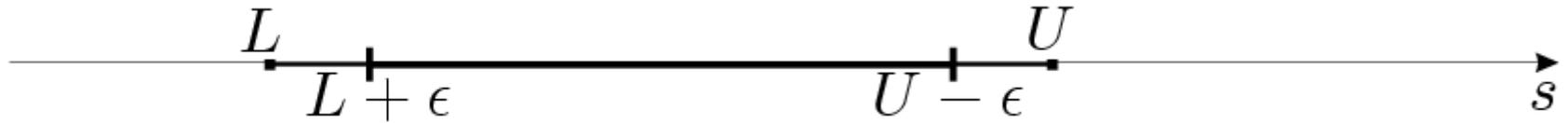
Differentiated Backprojection

Transformée de Hilbert en $1D$

$$Hg(s) = \int_{\mathbb{R}} g(s - s')h(s')ds$$

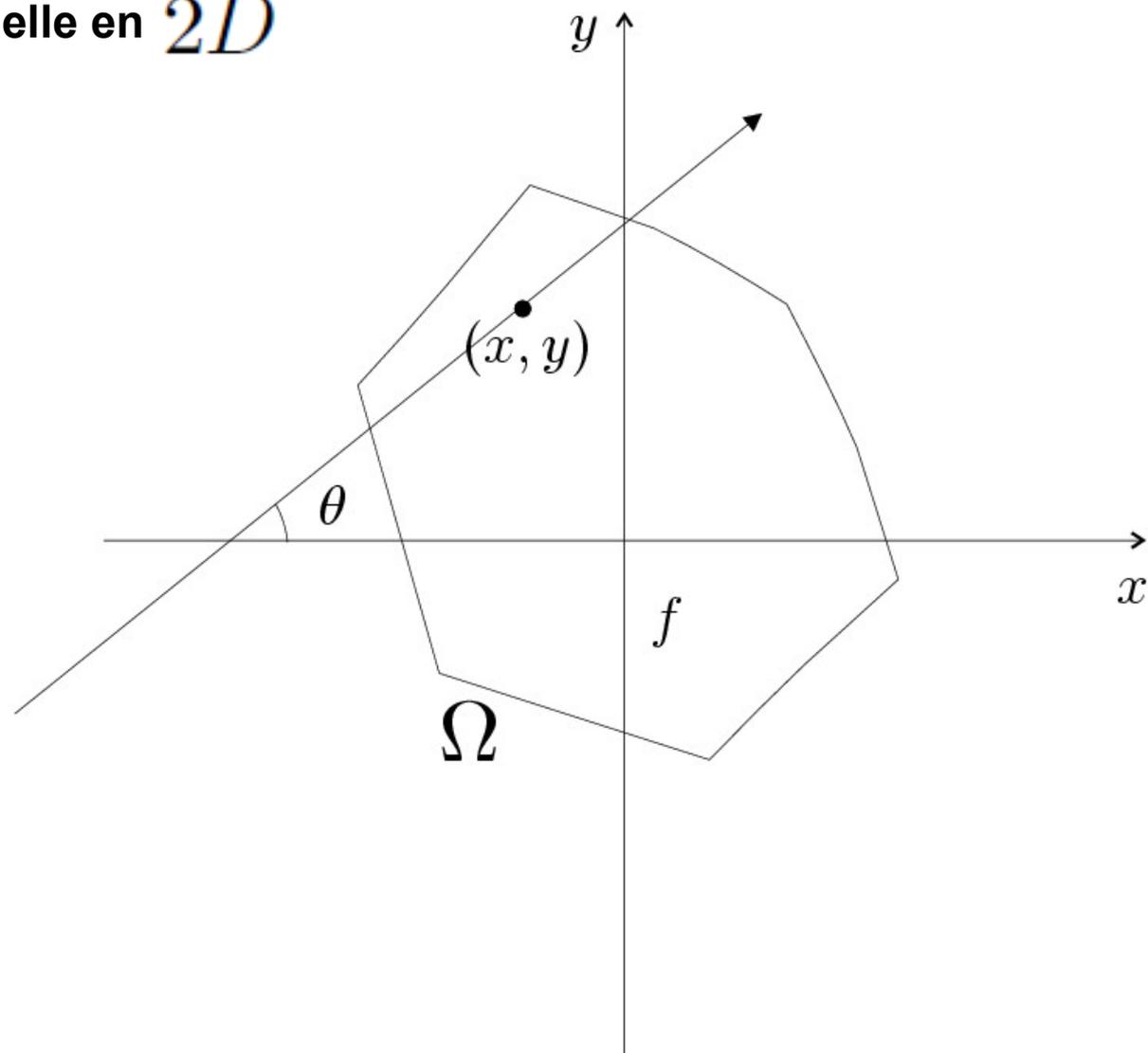
$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

Inversion de la transformée de Hilbert



$$g(s) = \frac{-1}{\sqrt{(s-L)(U-s)}} \left(\int_L^U \sqrt{(s-L)(U-s)} \frac{Hg(s')}{\pi(s-s')} ds' + C \right)$$

Transformée de Hilbert directionnelle en $2D$



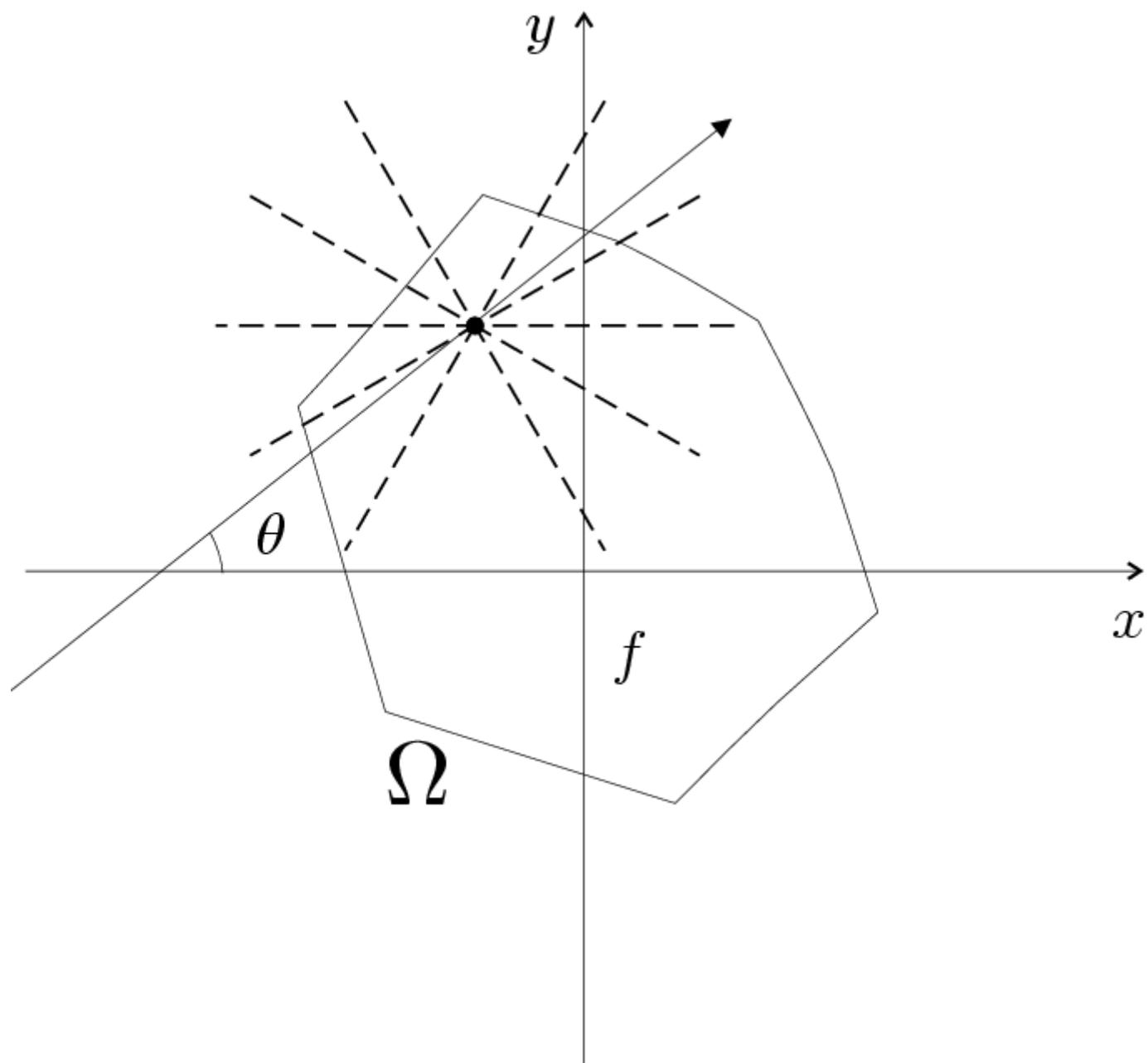
$$H_{\theta} f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x - s \cos \theta, y - s \sin \theta) h(s) ds$$

Rétroprojection des dérivées de projections

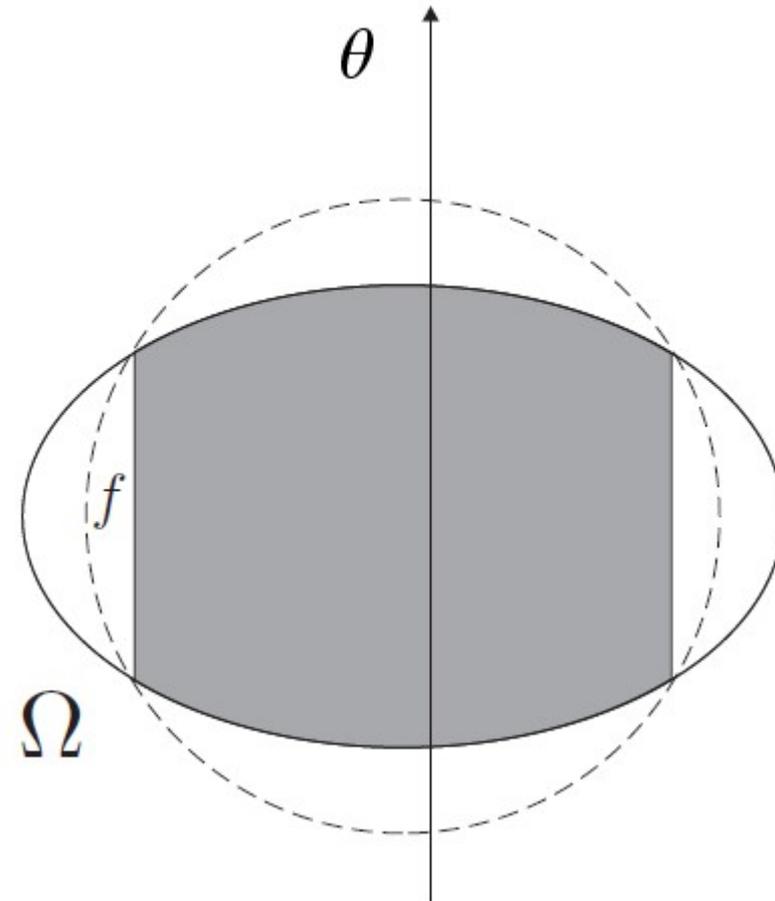
$$b_{\theta}(x, y) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \frac{\partial}{\partial s} [p(\phi, s)]_{s=(x,y) \cdot \alpha^{\perp}} d\phi$$

Formule de la (DBP)

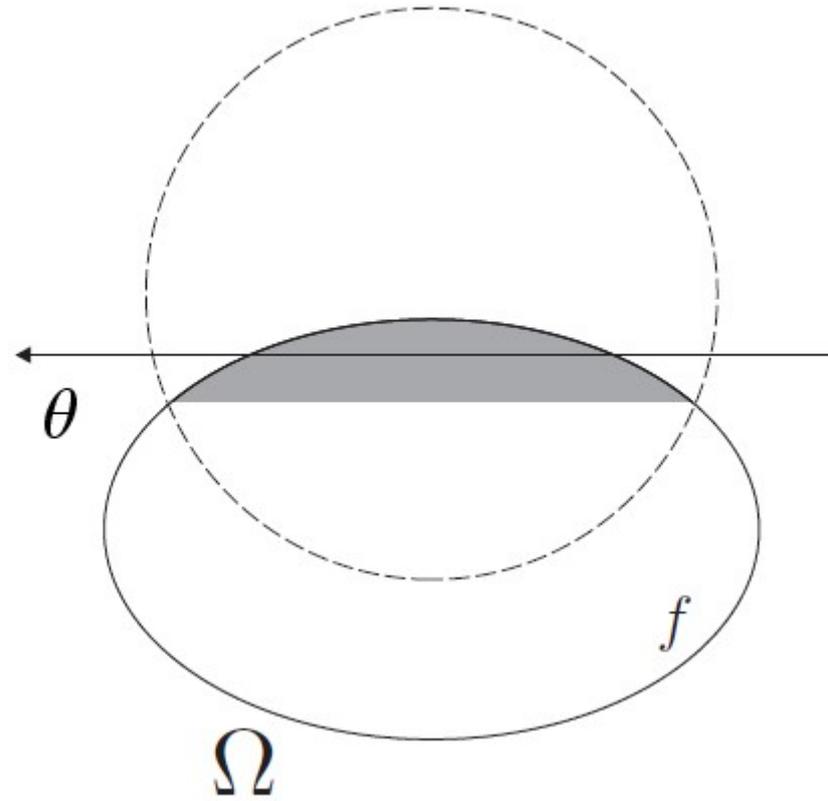
$$b_{\theta}(x, y) = 2\pi H_{\theta} f(x, y)$$



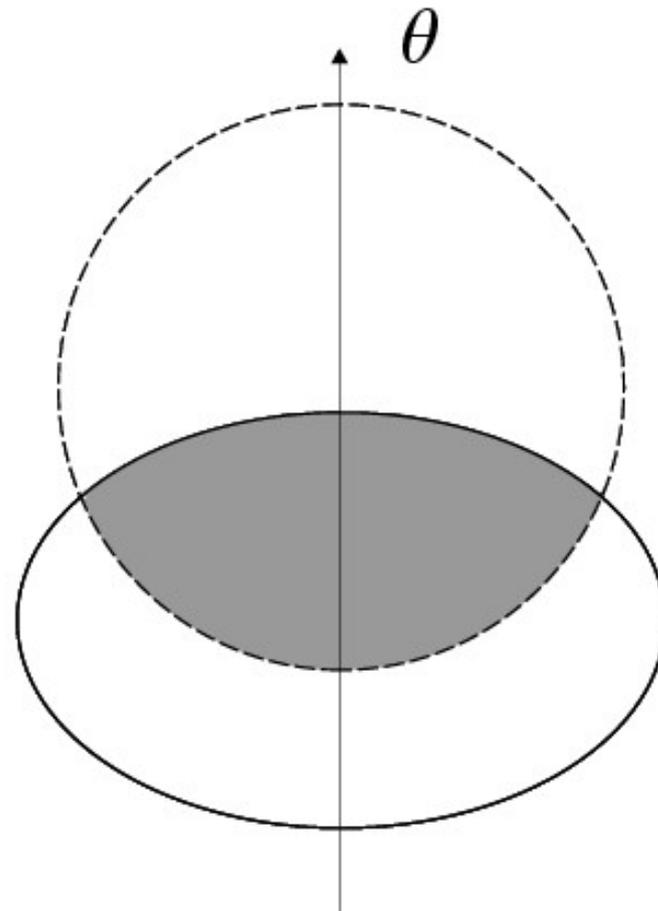
La (DBP) et les données incomplètes



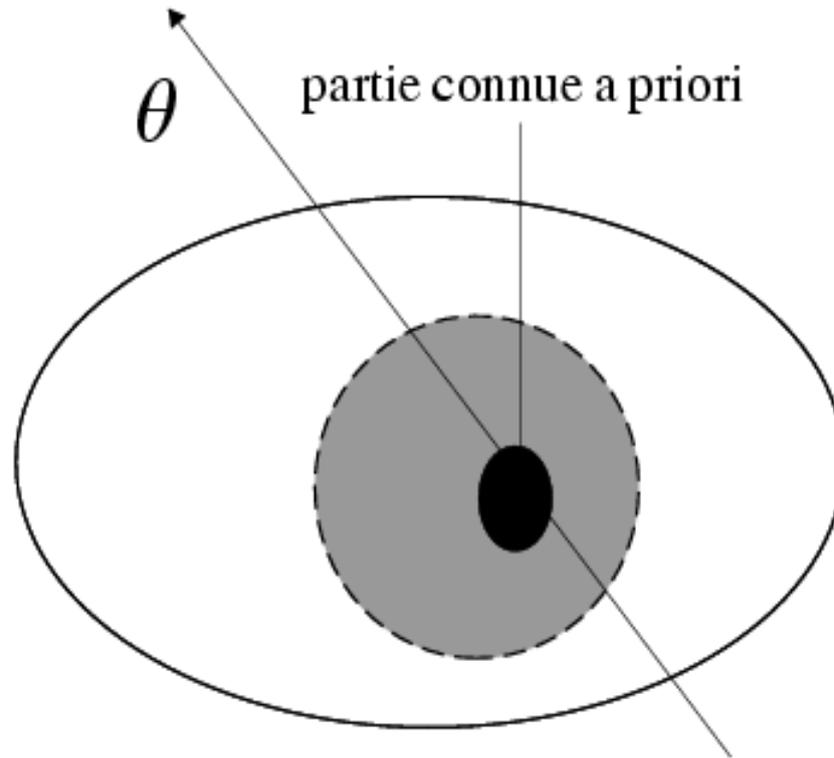
La (DBP) et les données incomplètes



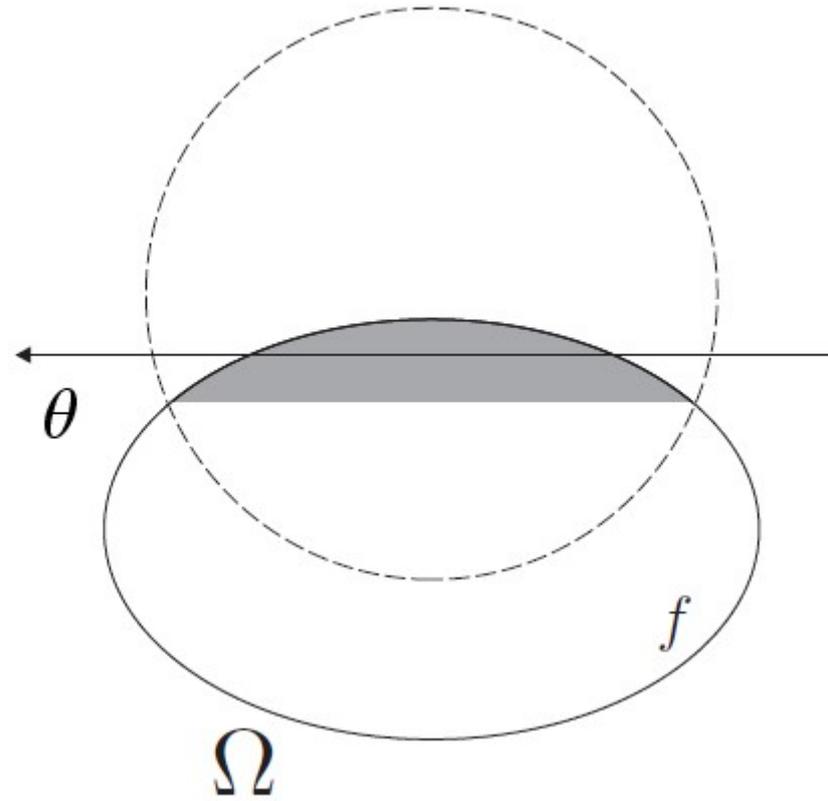
La (DBP) et les données incomplètes



La (DBP) et les données incomplètes



La (DBP) et les données incomplètes



6. Méthode du fanbeam virtuel

FBP classique

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s} [p_H(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$

$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds'$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

6. Méthode du fanbeam virtuel

Transformée de Hilbert en fanbeam

$$g_H(v, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(d, \eta, \theta') h(\sin(\theta - \theta')) d\theta'$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

Formule de changement pour la transformée de Hilbert

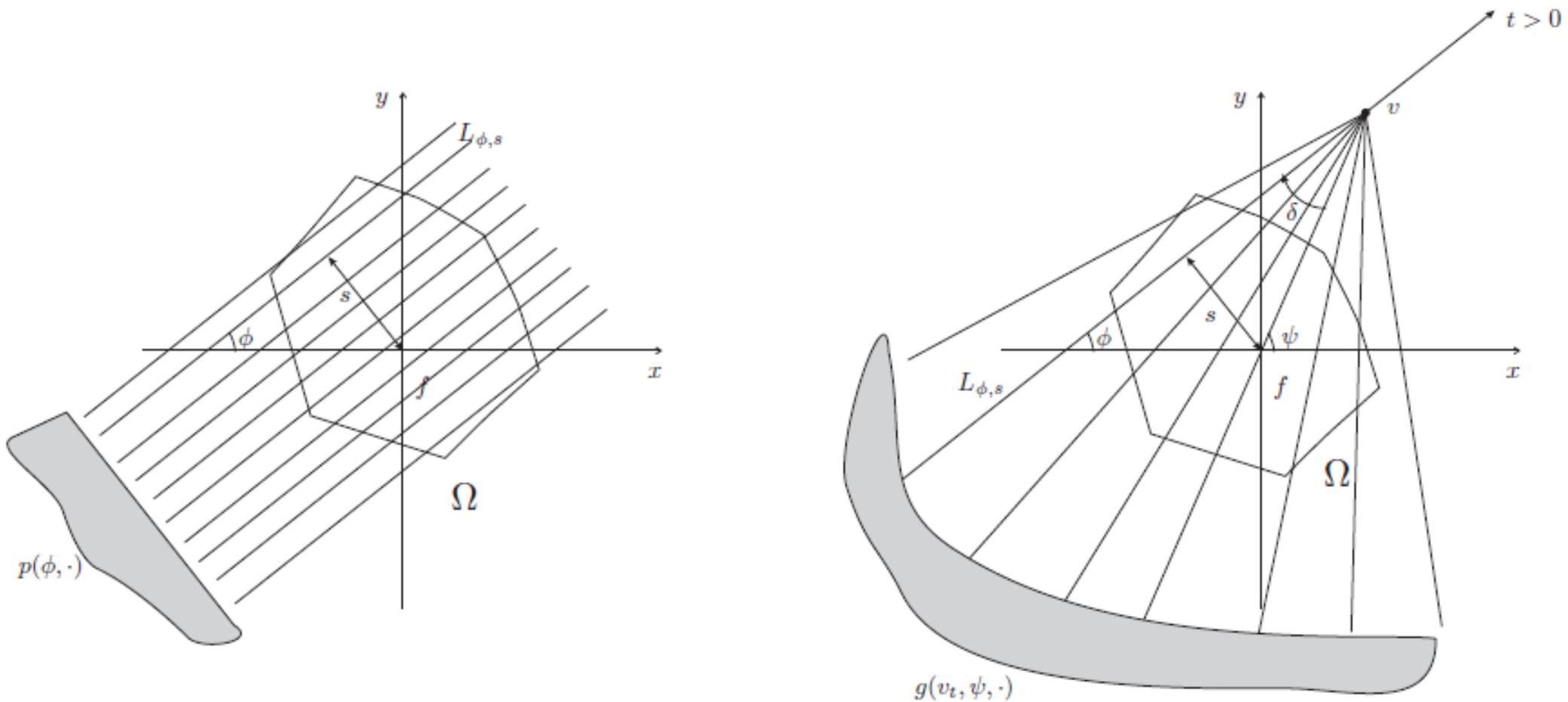
$$\phi \in [0, \pi), s \in \mathbb{R}, v \in L_{\phi, s} \setminus \Omega$$

$$p_H(\phi, s) = -\operatorname{sgn}(t) g_H(v, \delta)$$

$$t = v \cdot (\cos \phi, \sin \phi)$$

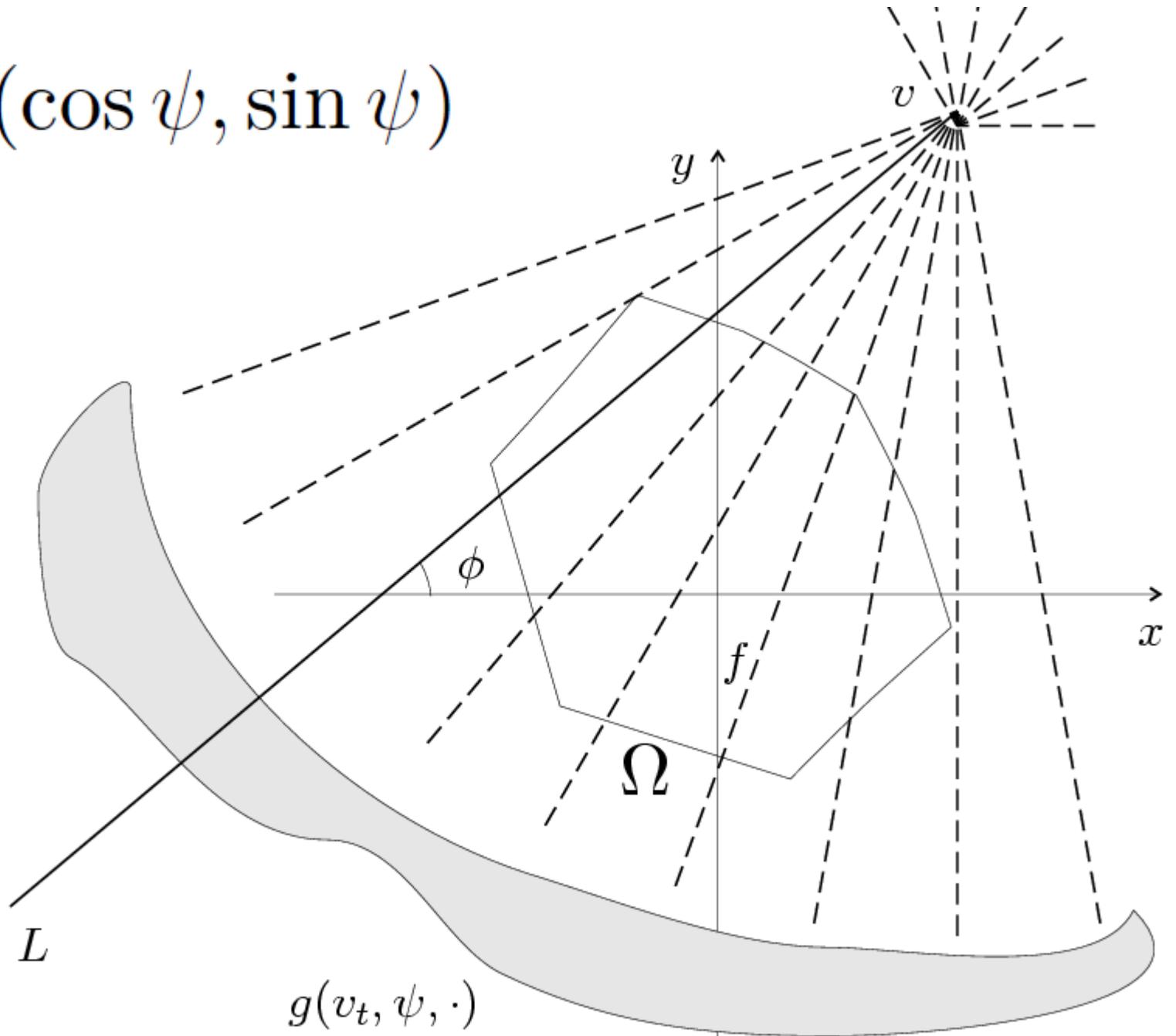
$$\delta = -\operatorname{sgn}(t) \sin^{-1} \frac{s}{\sqrt{t^2 + s^2}}$$

Formule de changement pour la transformée de Hilbert



Projections fanbeam virtuelles

$$v = v_t(\cos \psi, \sin \psi)$$



Fanbeam virtuel et données incomplètes

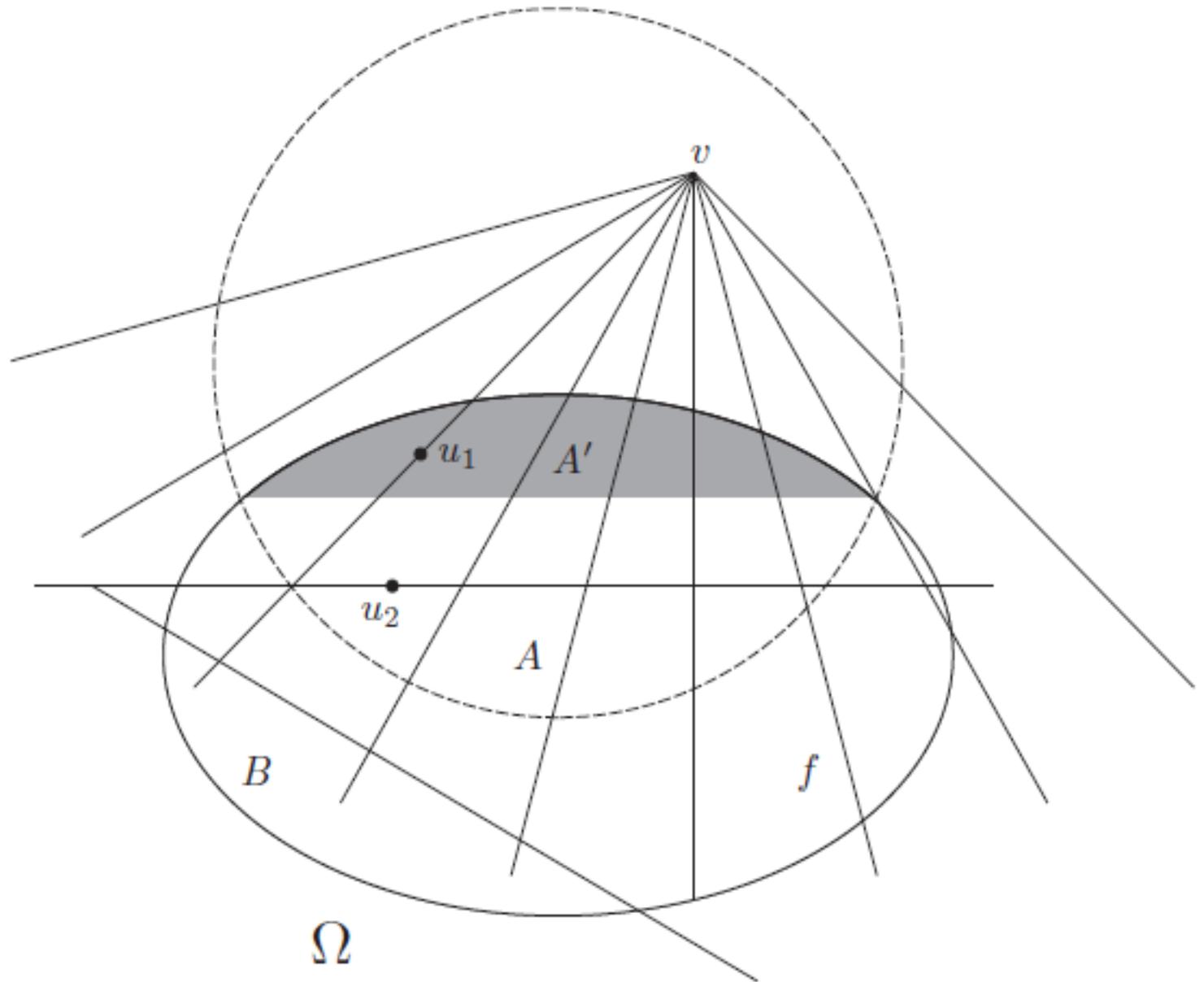
Région A'

$$A' \subset A$$

$\forall L \subset \mathbb{R}^2$ une ligne on a

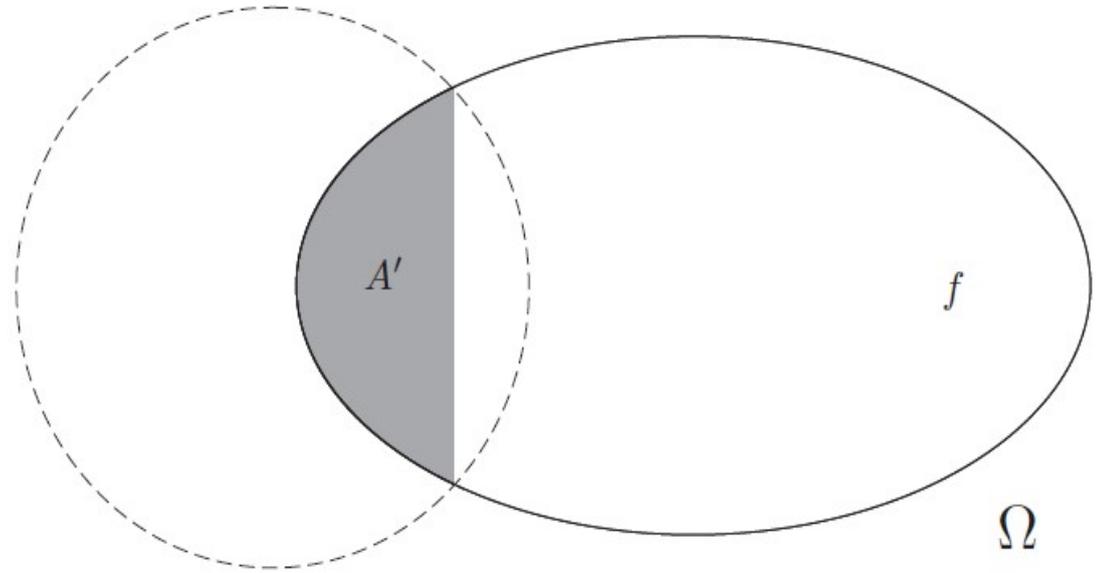
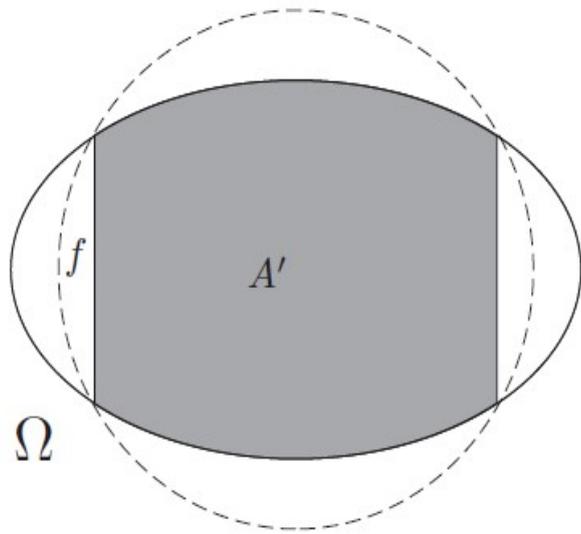
- Soit $L \cap A' = \emptyset$
- Soit il existe $v = v_t(\cos \psi, \sin \psi) \in L \setminus \Omega$ tel que la projection fanbeam virtuelle de vertex virtuel $g(v_t, \psi, \cdot)$ soit mesurée.

Région A'



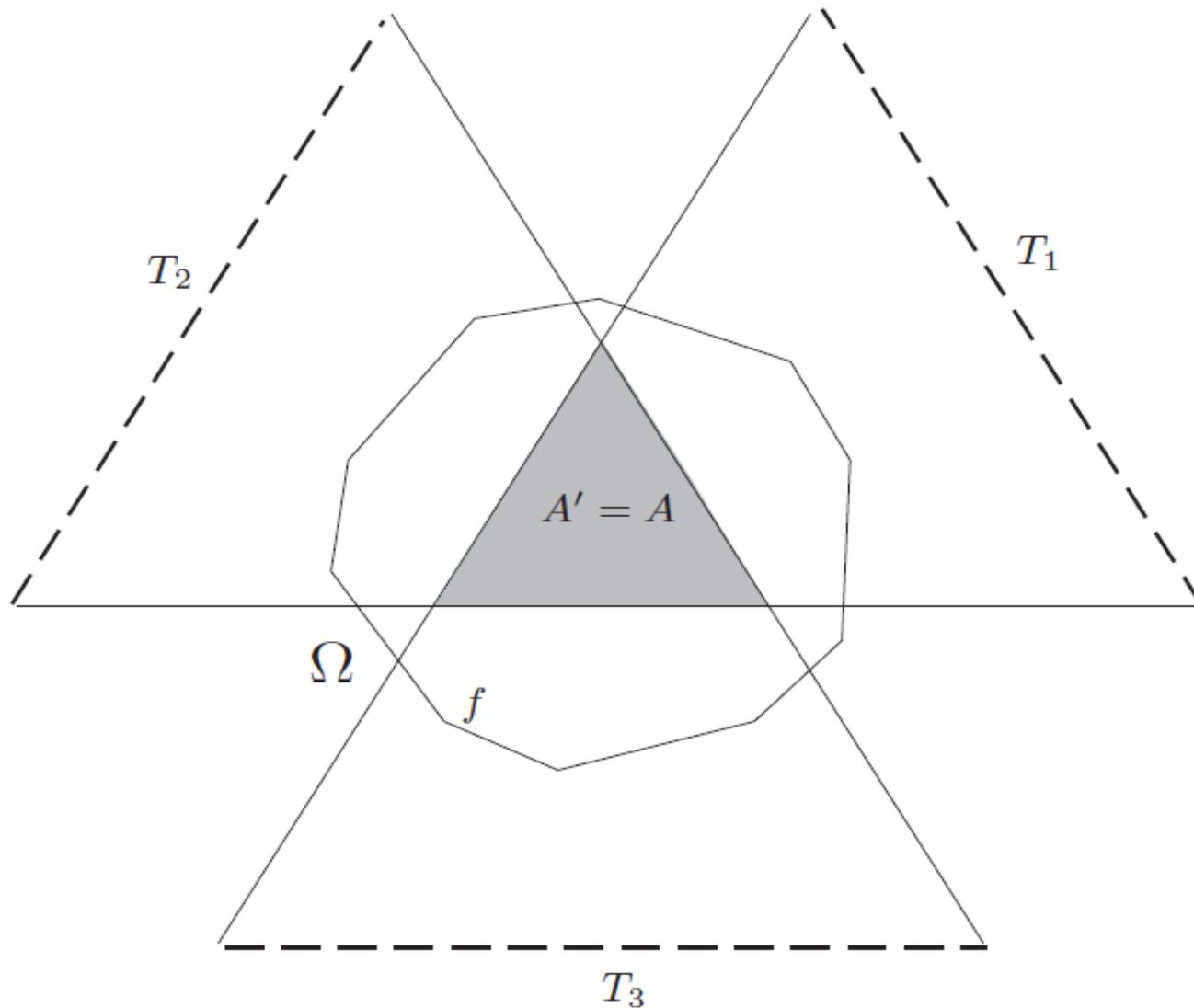
La région A' est reconstructible par la méthode du fanbeam virtuel

Exemples de reconstruction à partir de données incomplètes



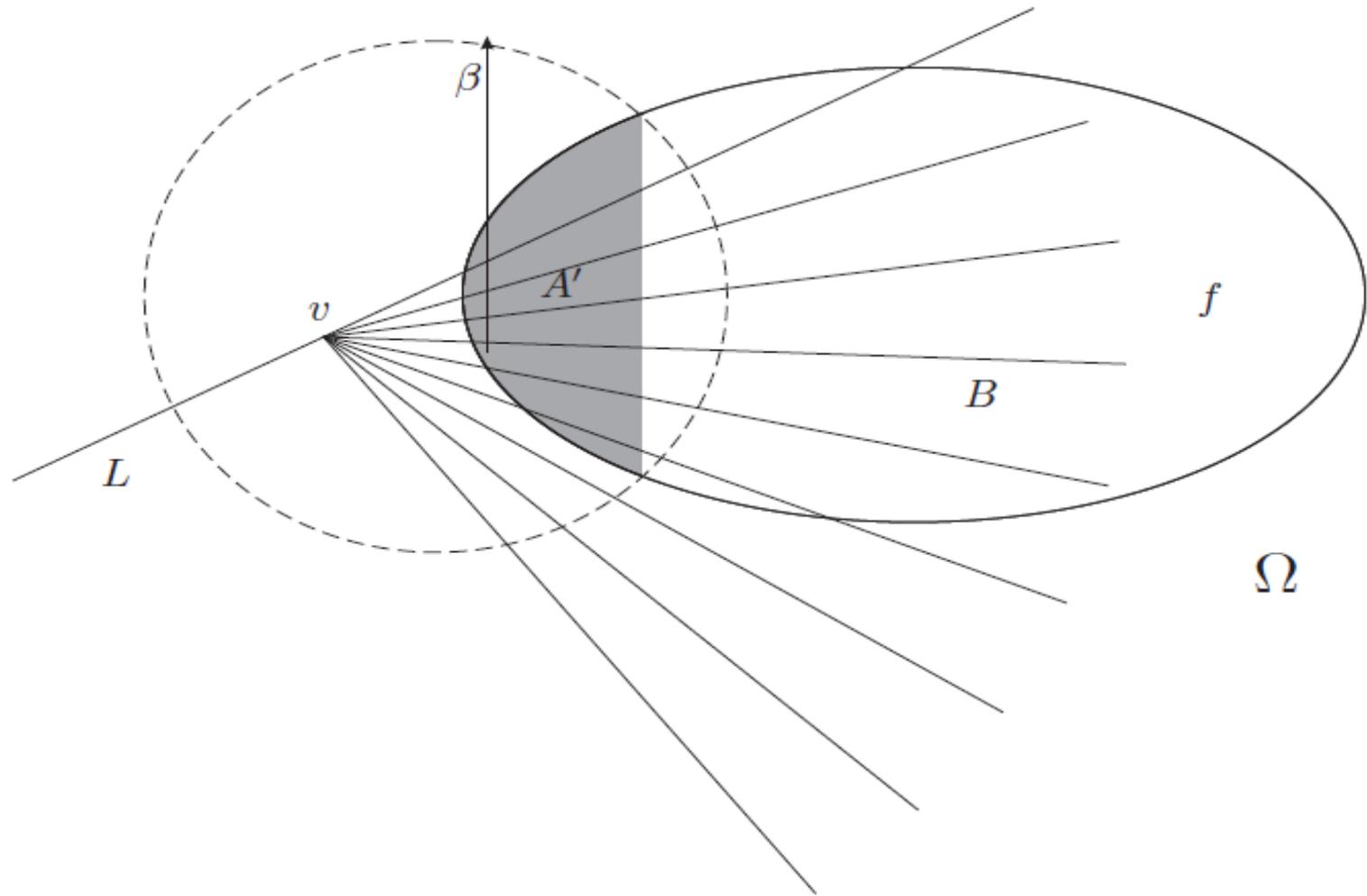
La région A' est reconstructible par la méthode du fanbeam virtuel

Exemples de reconstruction à partir de données incomplètes



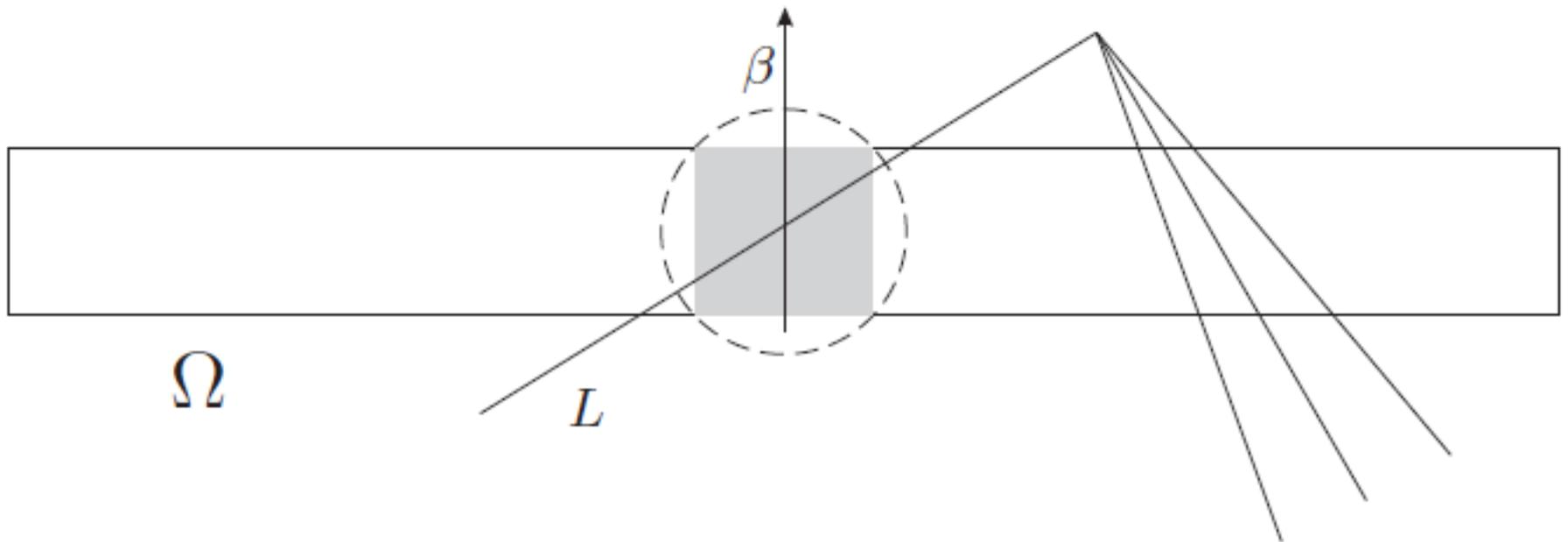
La région A' est reconstituée par la méthode du fanbeam virtuel

7. Comparaison de deux méthodes



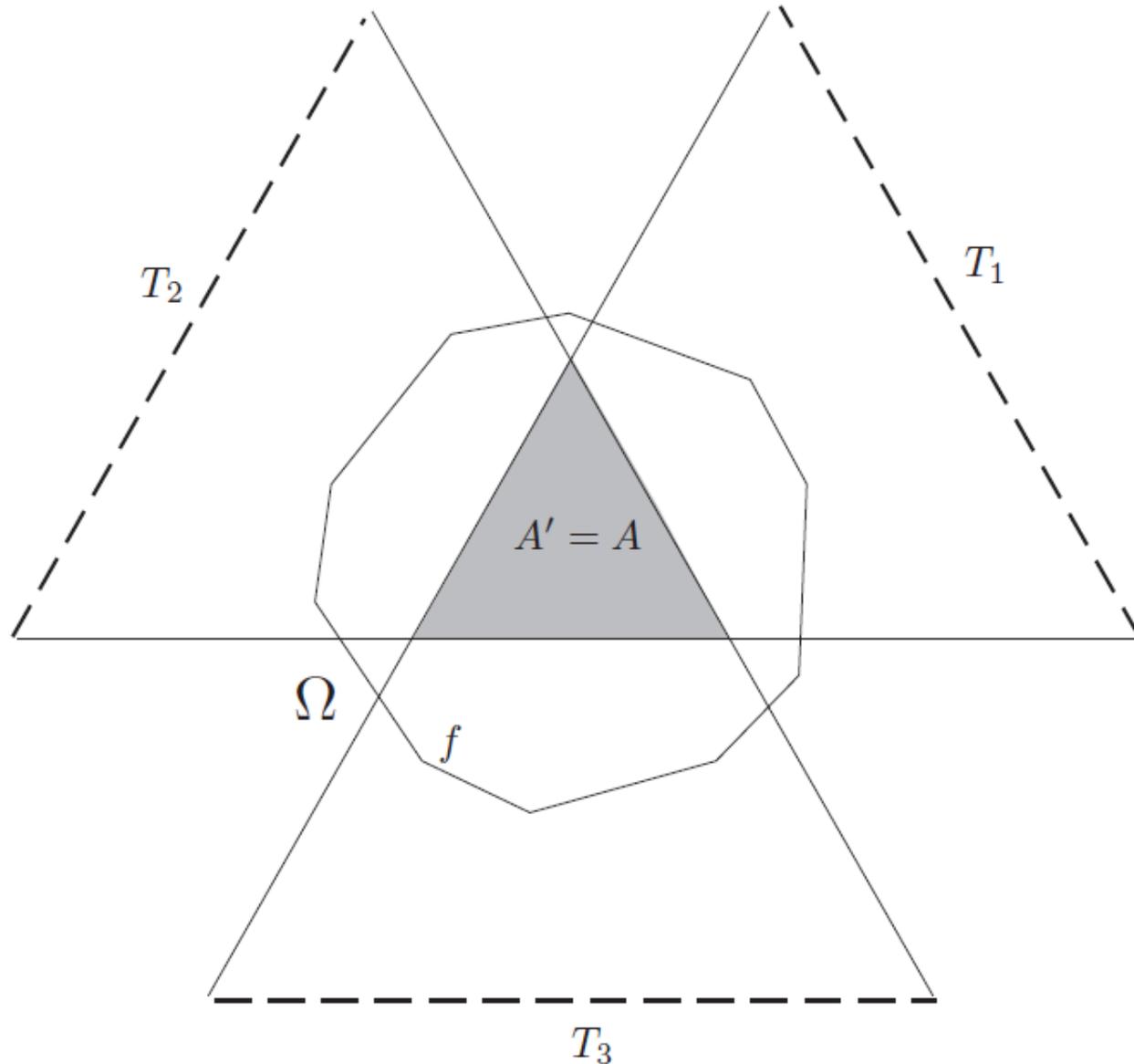
Les deux méthodes sont applicables

7. Comparaison de deux méthodes



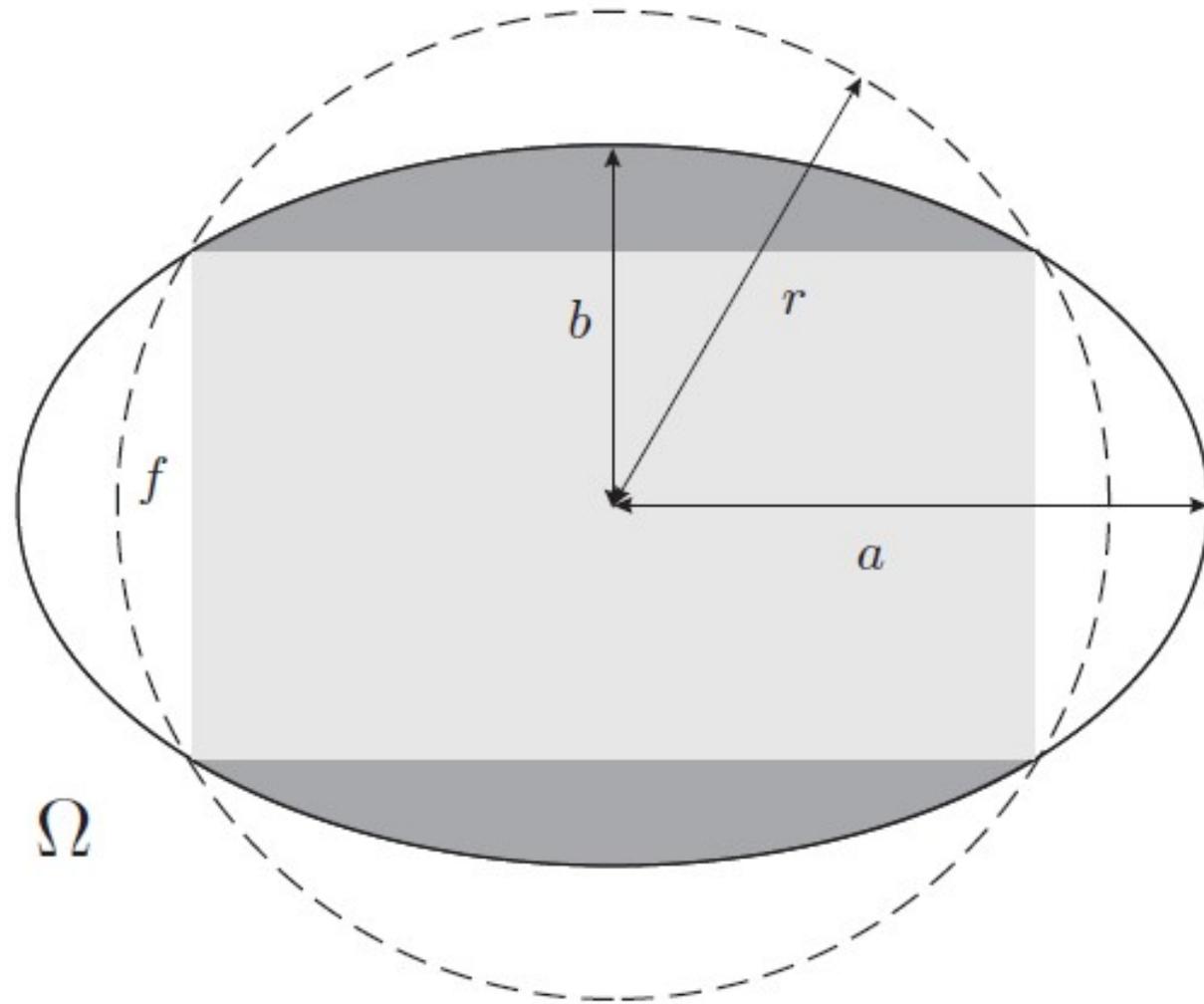
Seule la méthode de (DBP) qui est applicable

7. Comparaison de deux méthodes



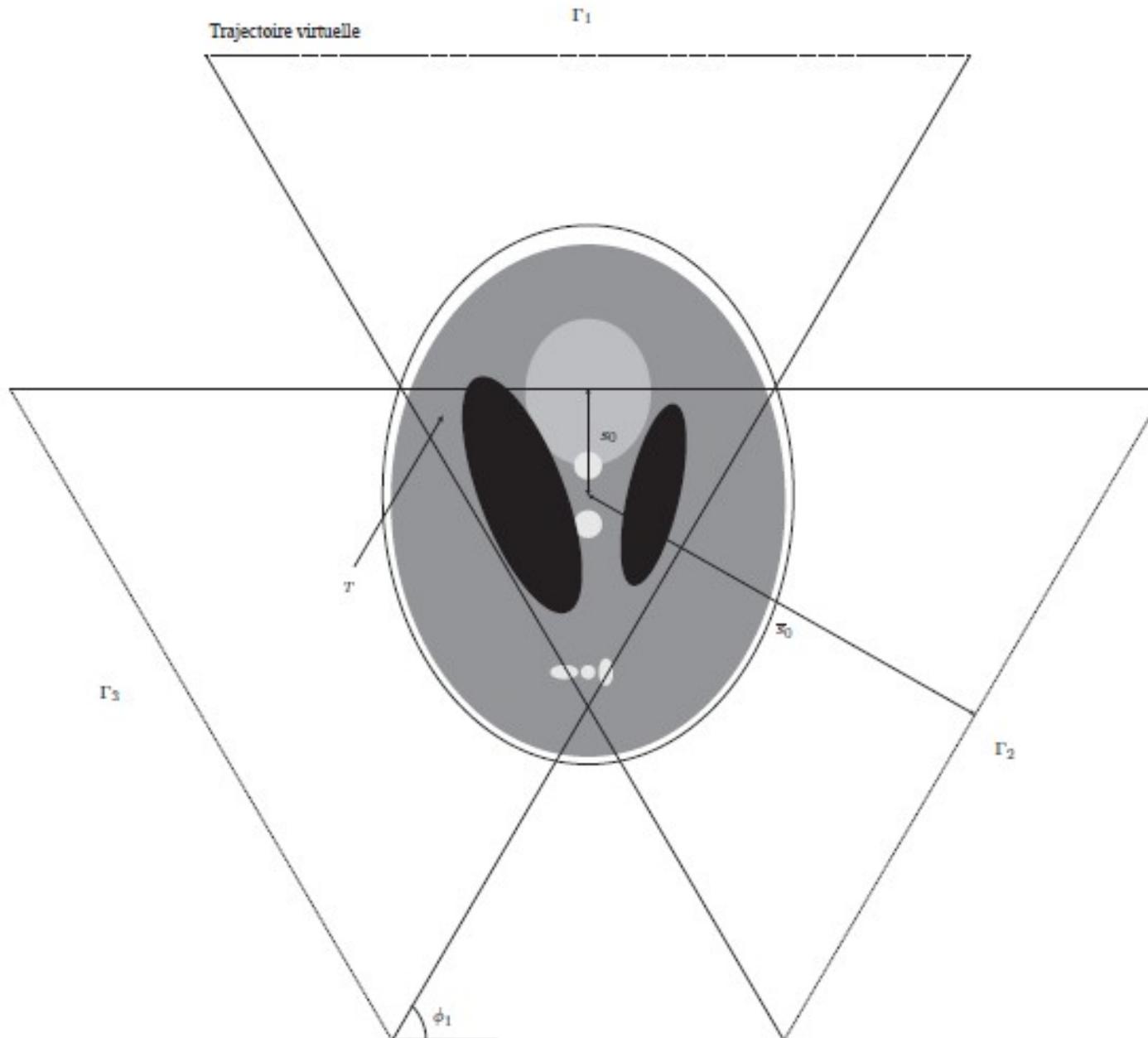
Seule la méthode du fanbeam virtuel qui est applicable

7. Comparaison de deux méthodes

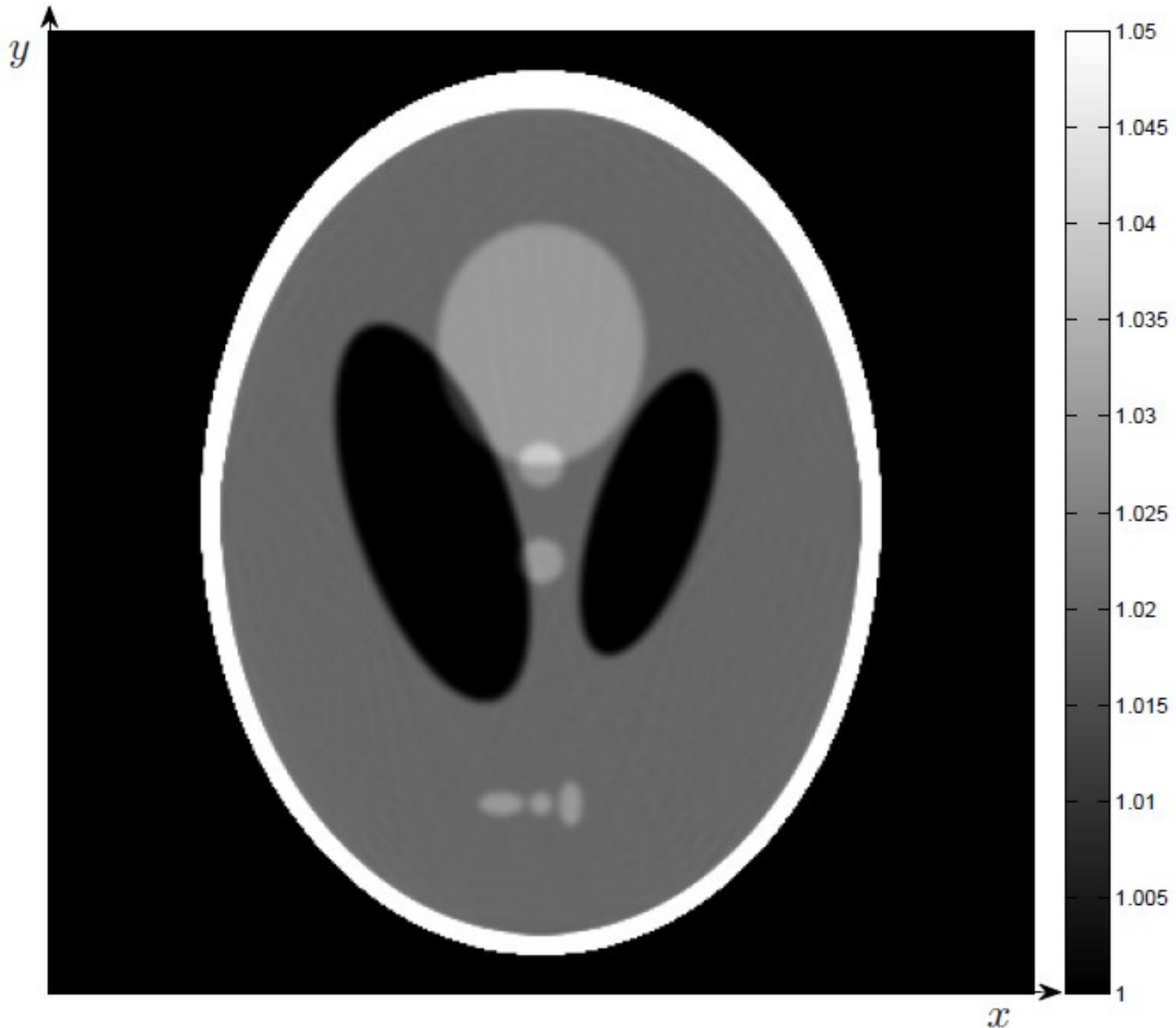


Chacune de deux méthodes peut être appliquées

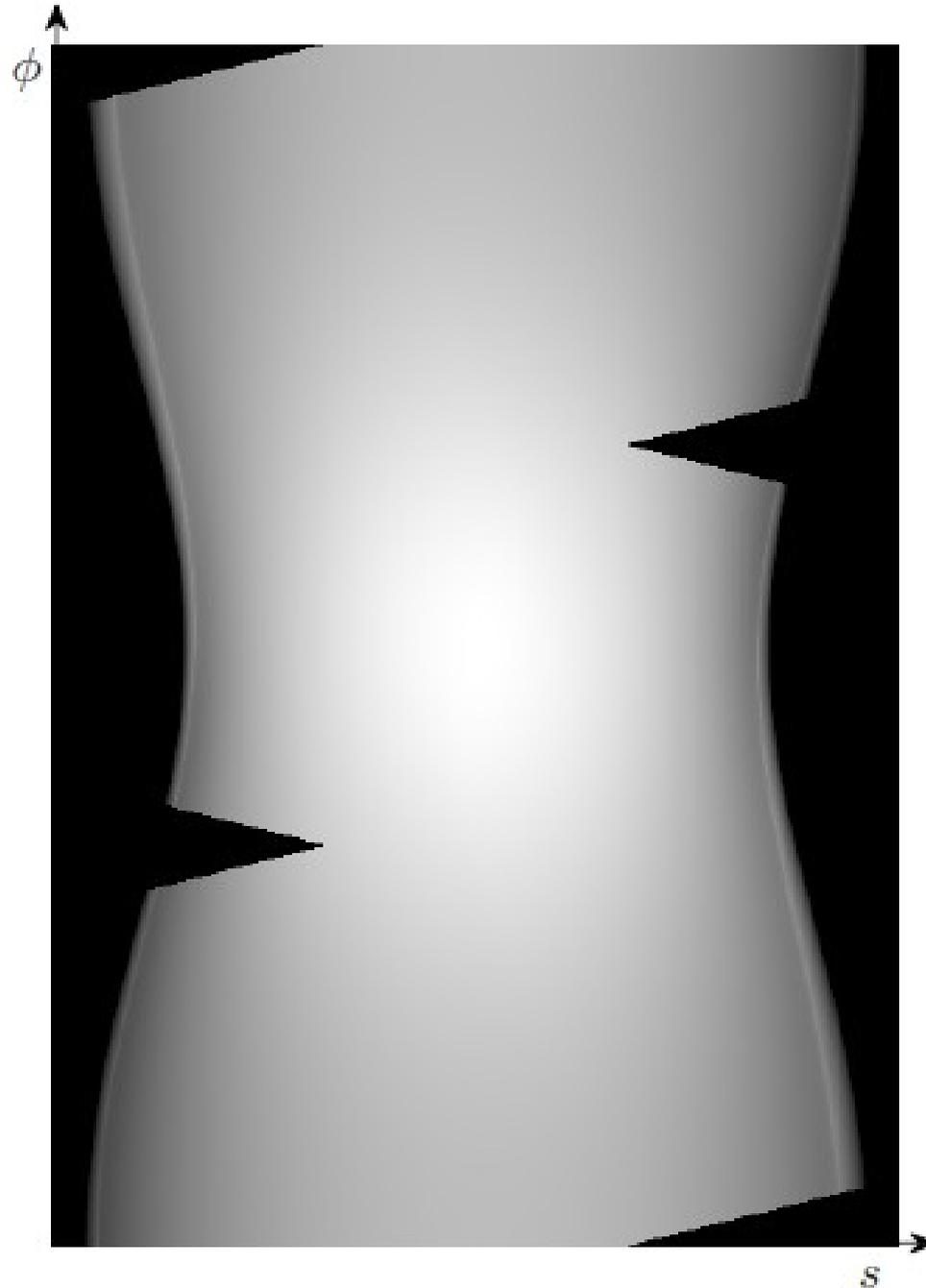
8. Quelques résultats



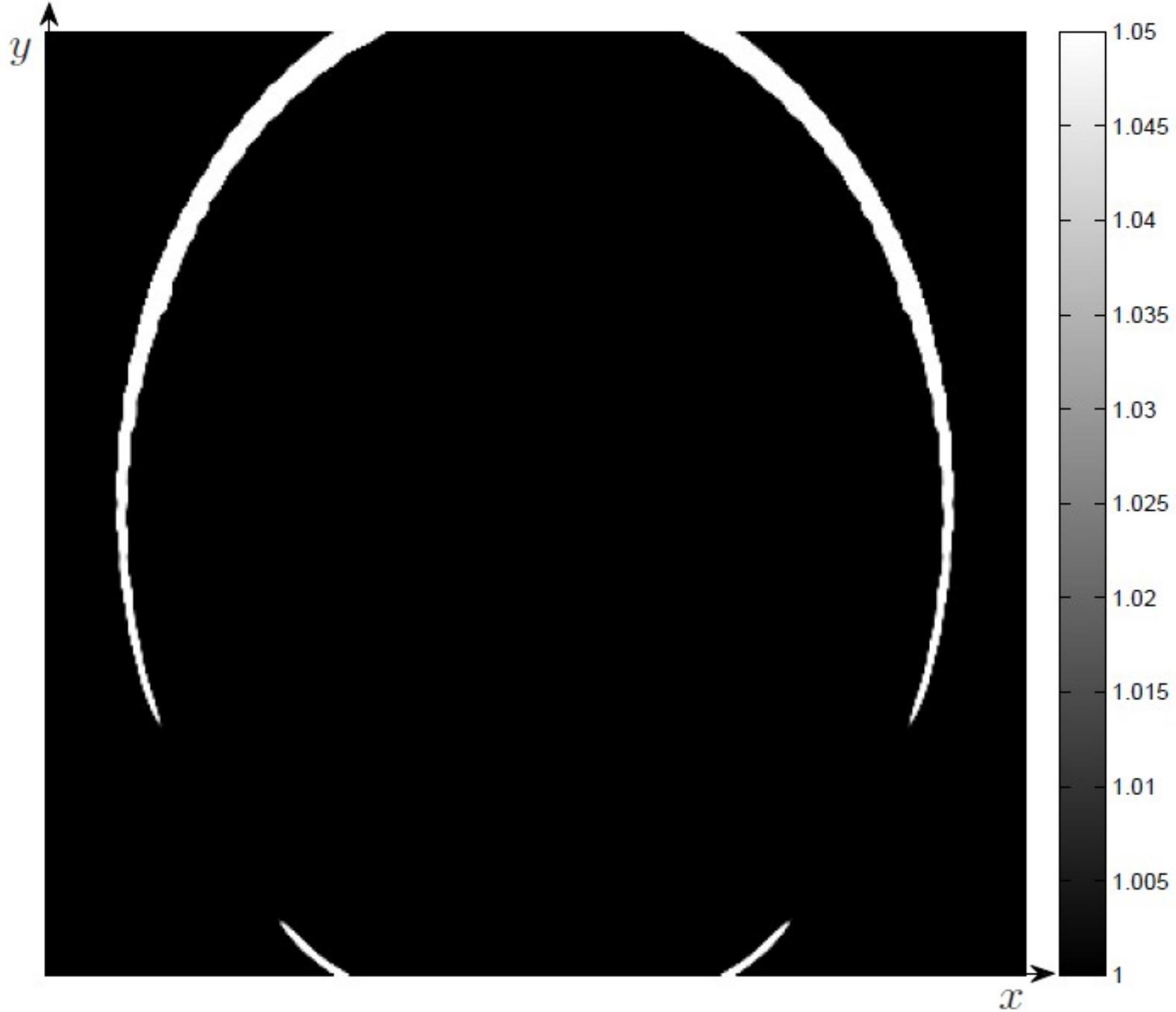
8. Quelques résultats



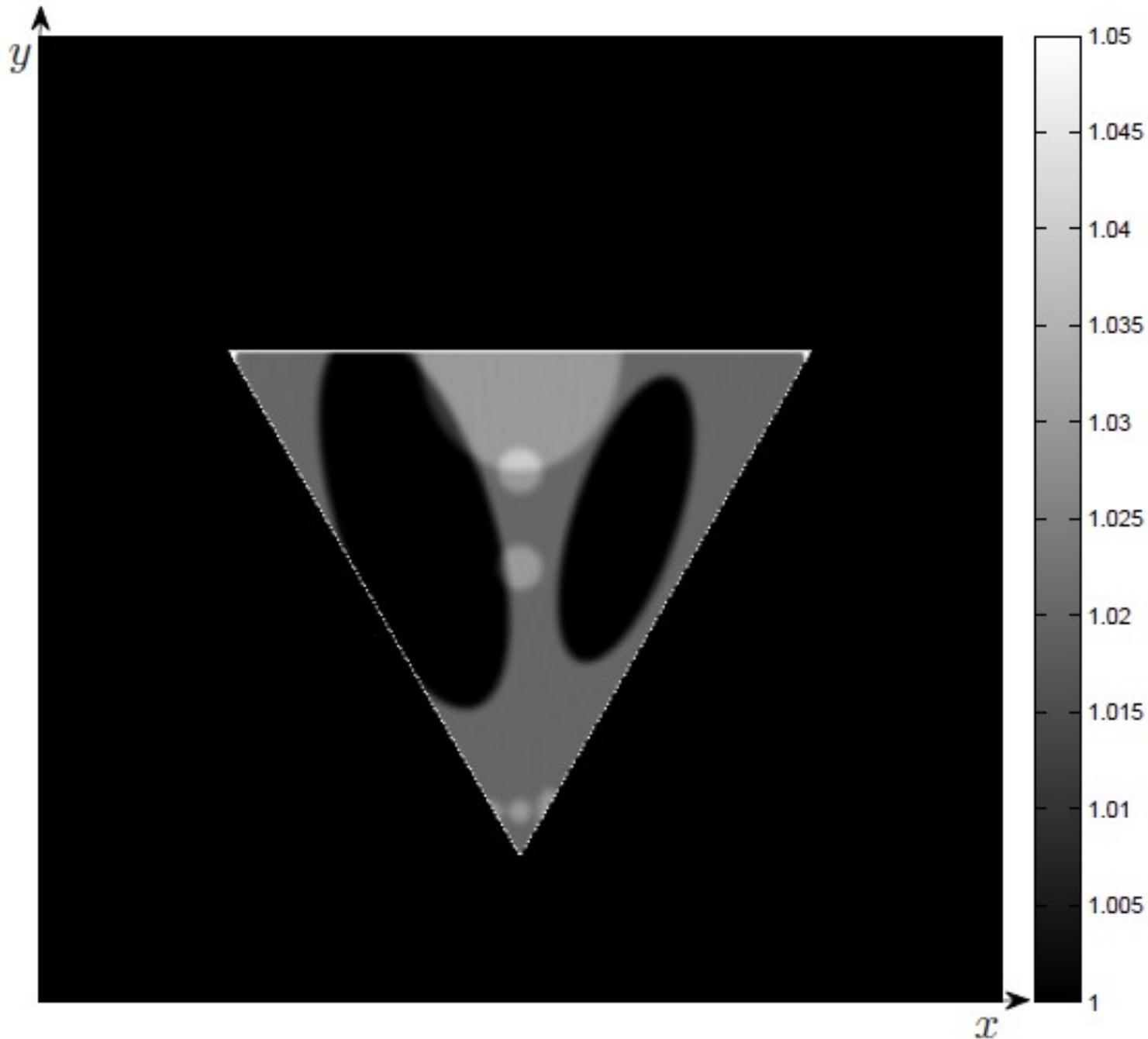
8. Quelques résultats



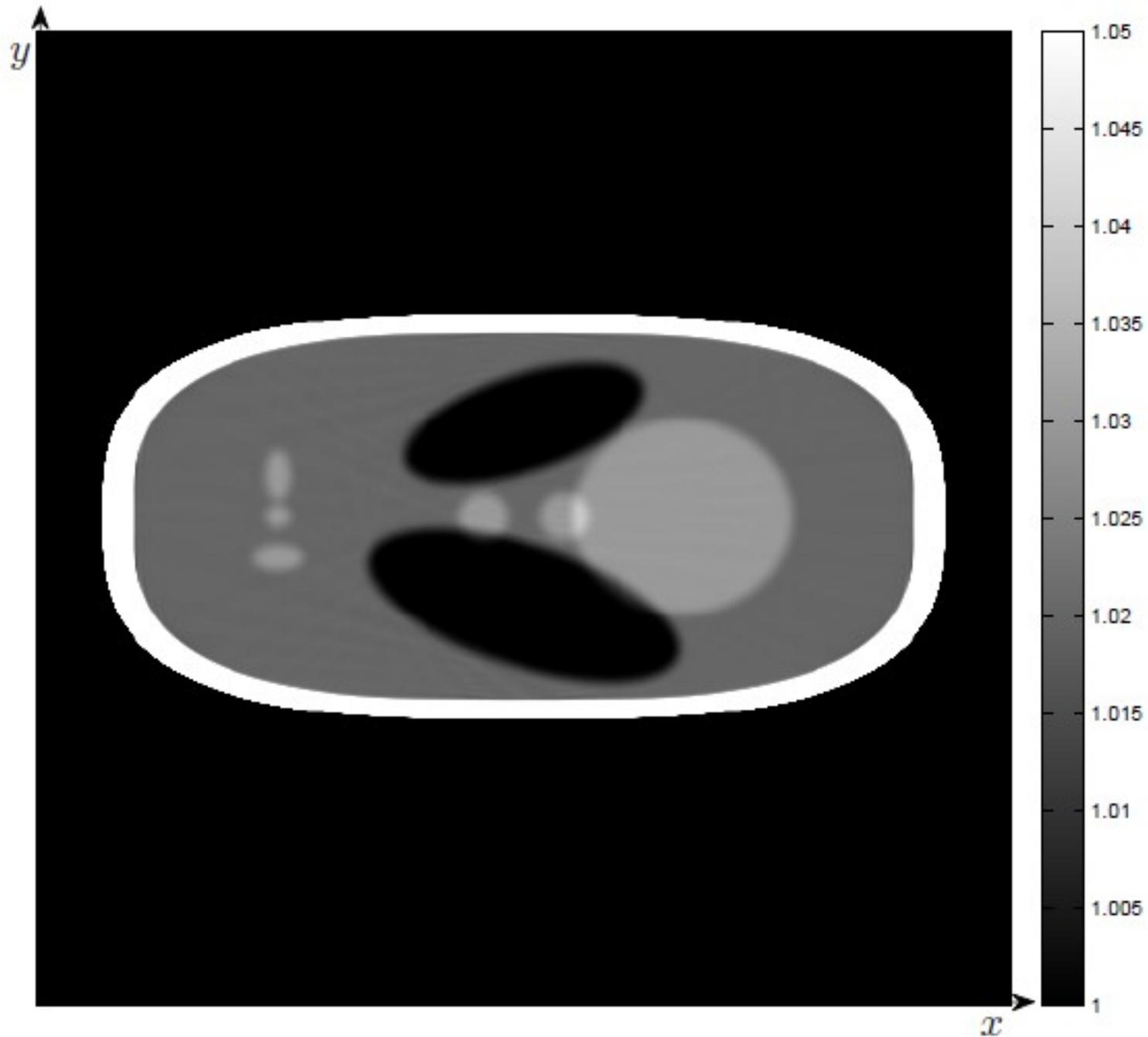
8. Quelques résultats



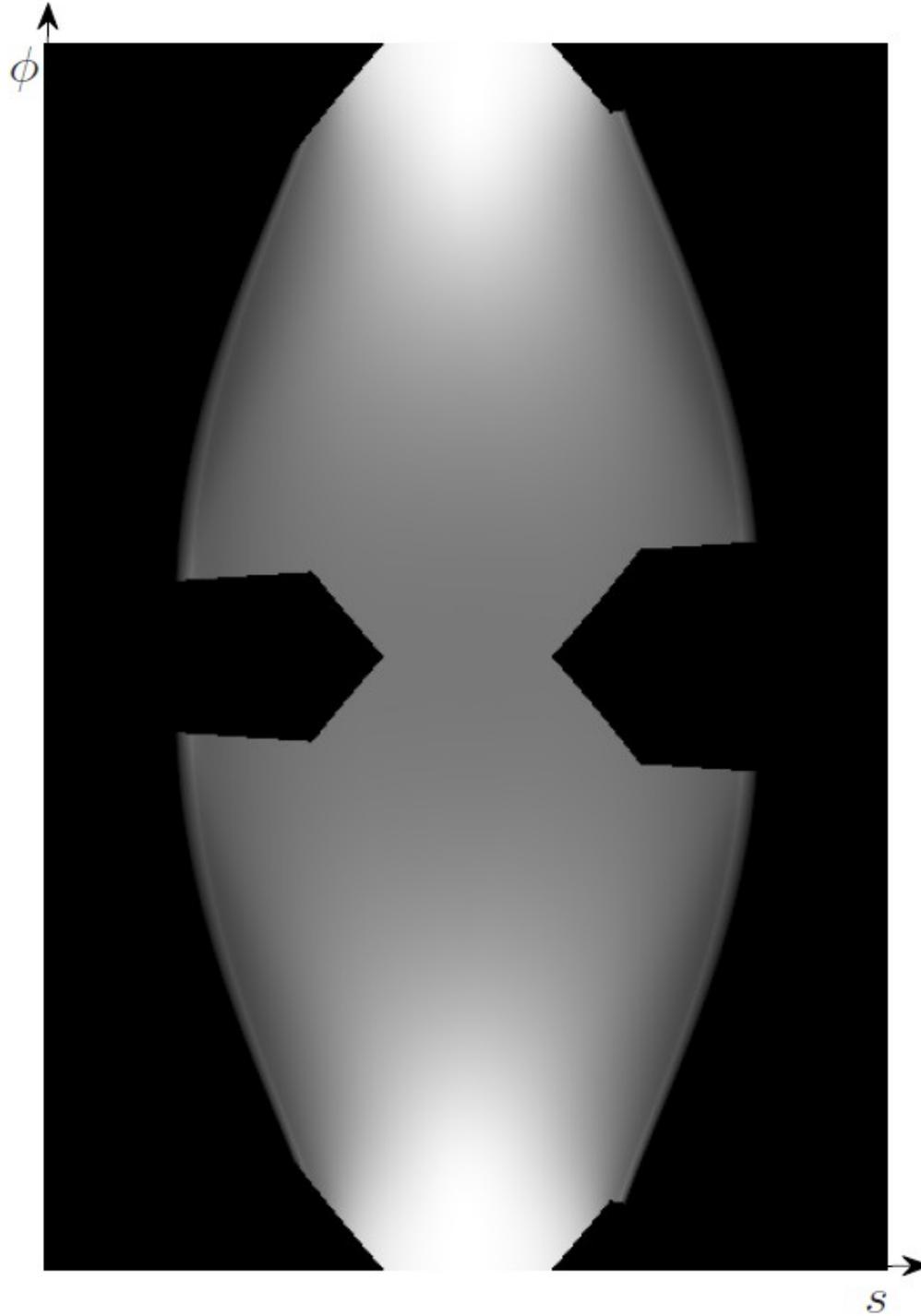
8. Quelques résultats



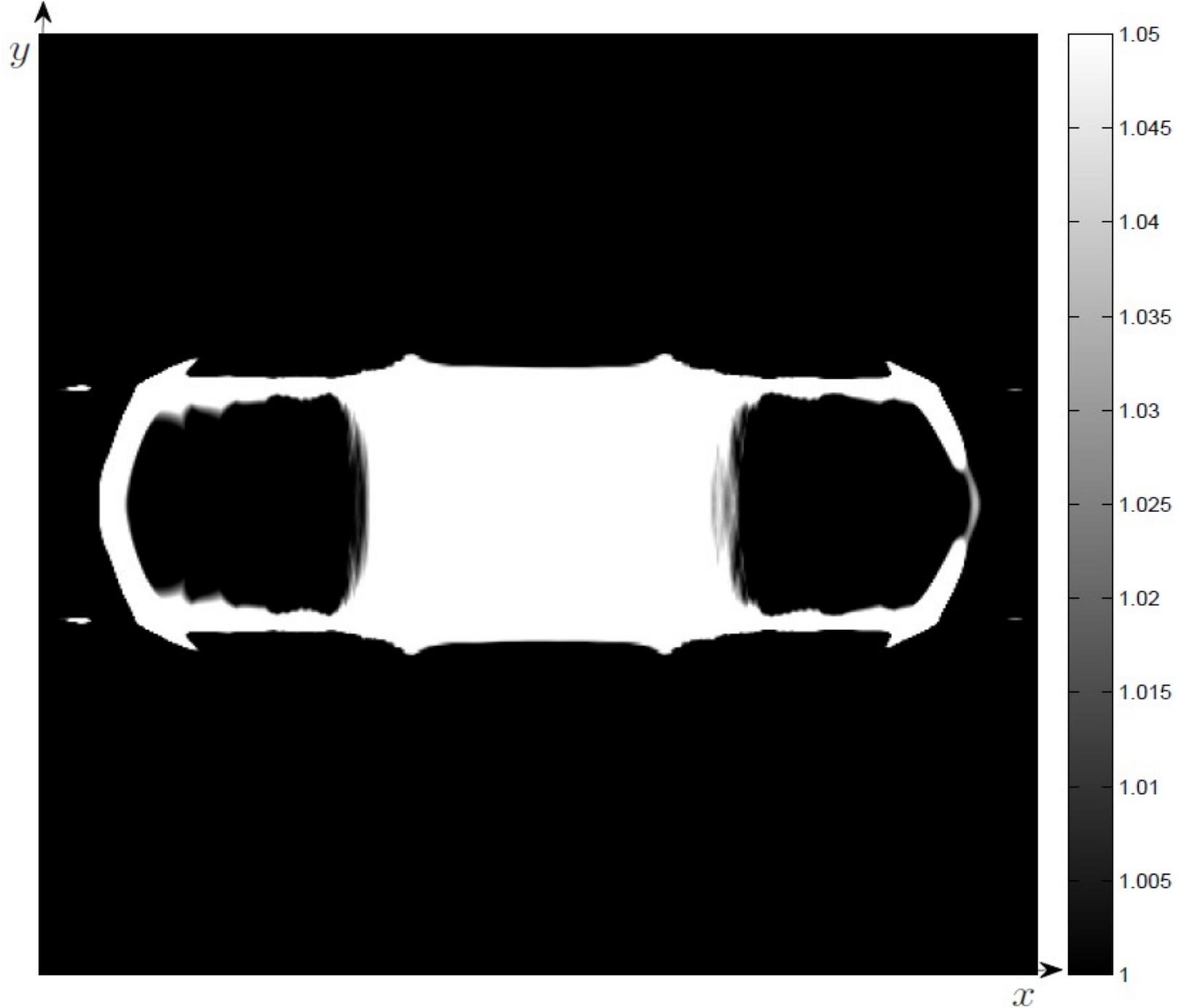
8. Quelques résultats



8. Quelques résultats



8. Quelques résultats



8. Quelques résultats

