

# Reconstruction tomographique à partir des données incomplètes en 2D

OULD MOHAMED Moctar-Salem

Rolf Clackdoyle et Catherine Mennessier

# **Plan de l'exposé**

**1. Données tomographiques**

**2. Problème tomographique**

**3. Solution classique**

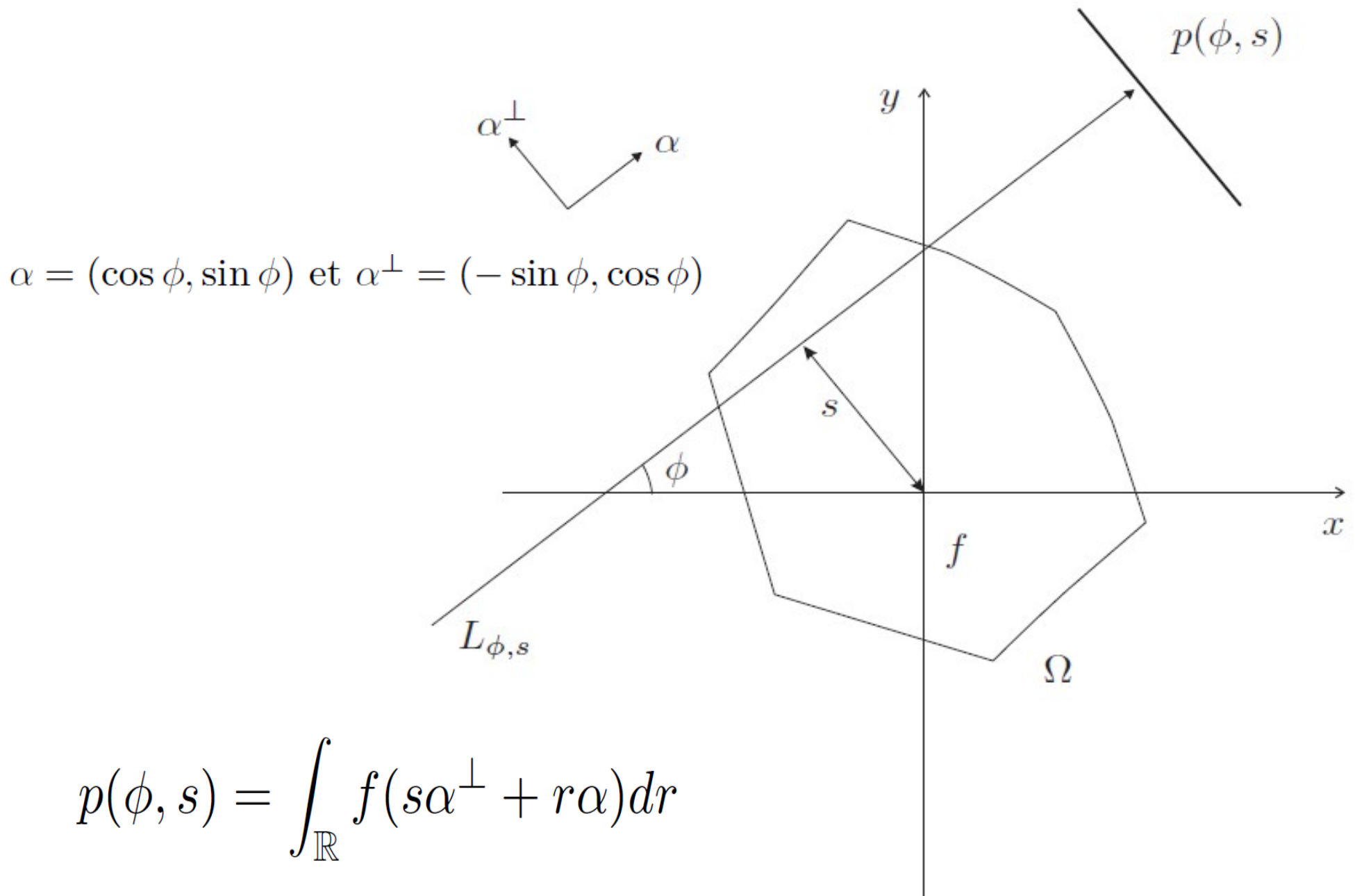
**4. Données incomplètes**

**5. Méthode de la (DBP)**

**6. Méthode du fanbeam virtuel**

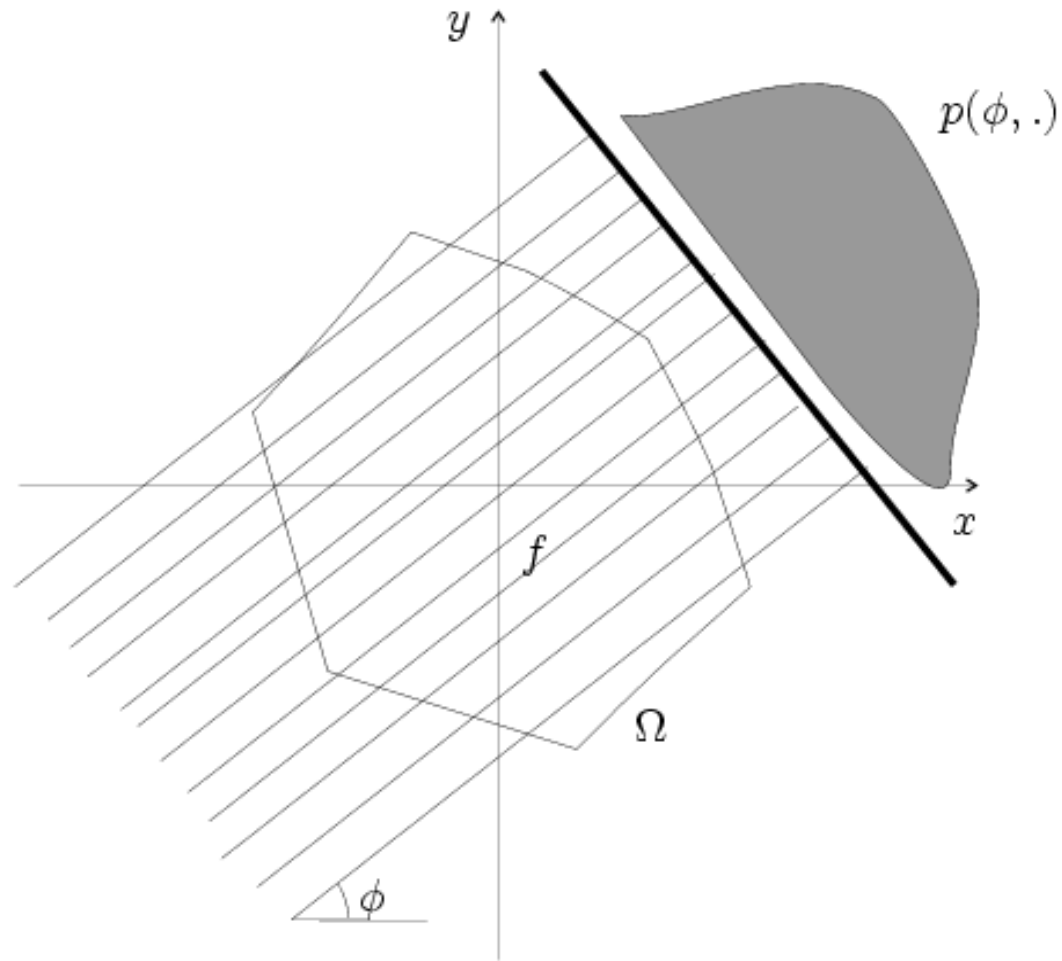
**7. Comparaison des deux méthodes**

## Projections parallèles



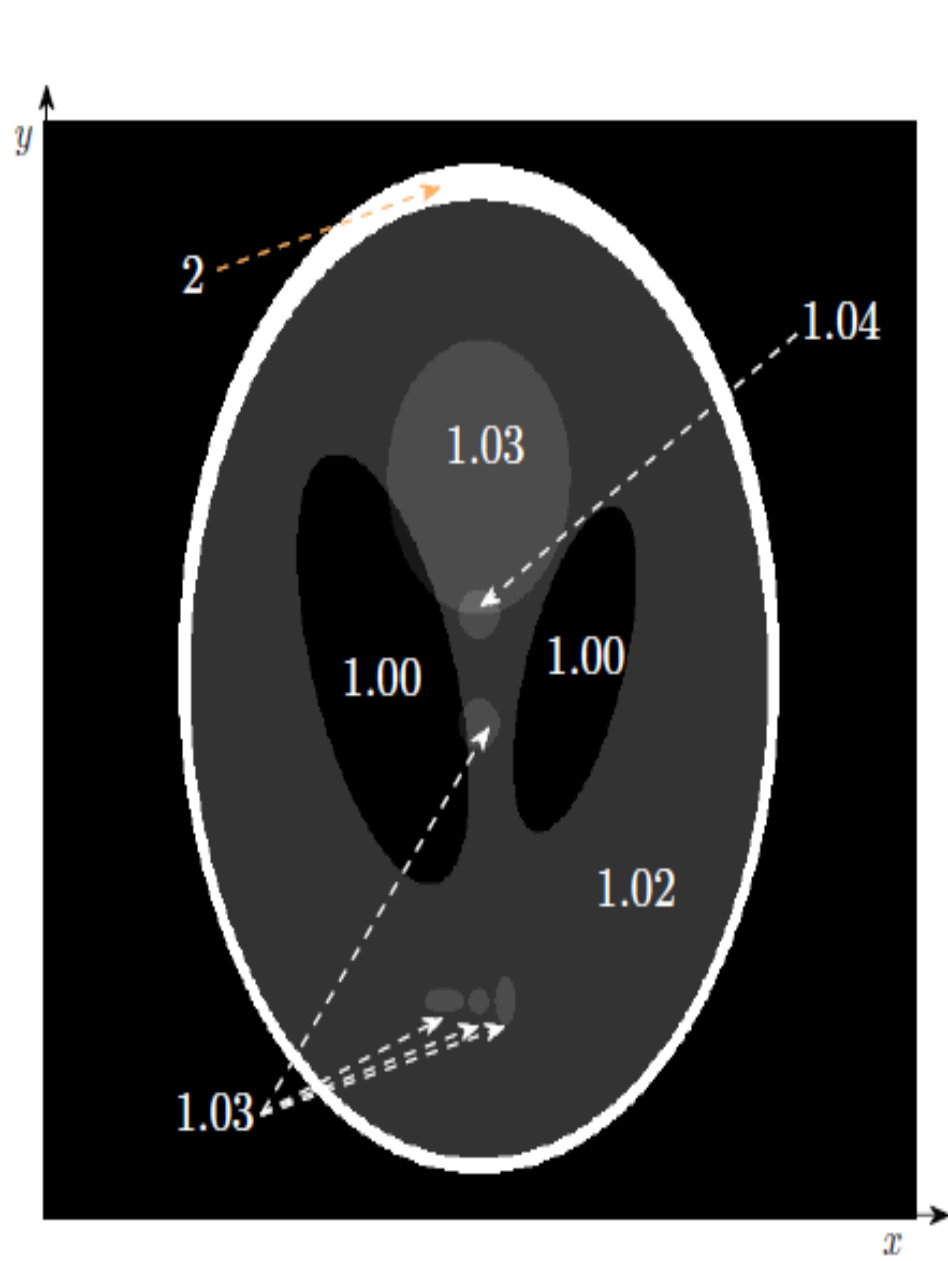
$$p(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\alpha^\perp + r\alpha) dr$$

## Projections parallèles



Les projections constituent l'ensemble de données du problème tomographique.

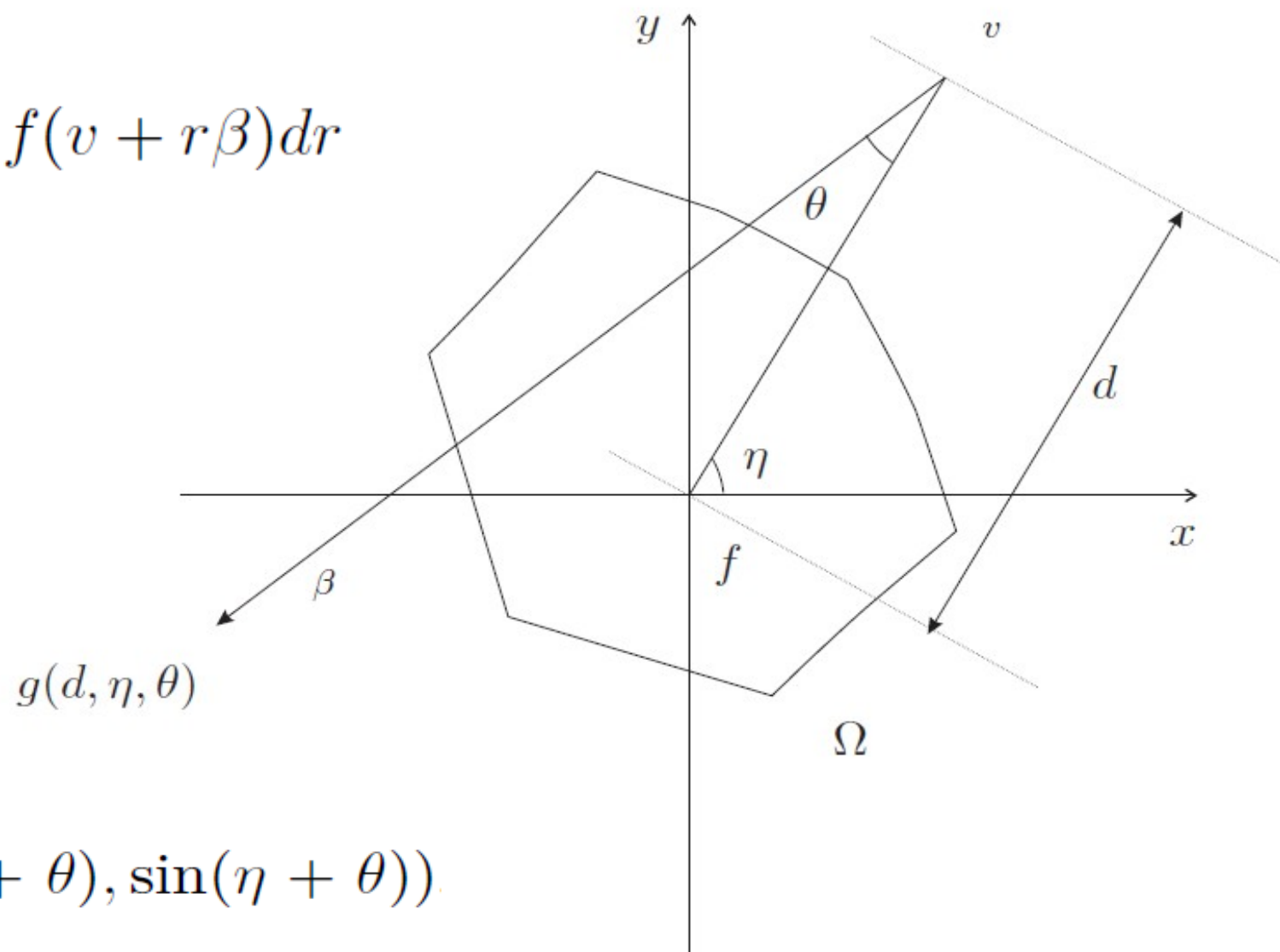
# Sinogramme



Le célèbre fantôme de Shepp-Logan et son sinogramme

## Projections fanbeam

$$g(d, \eta, \theta) = \int_0^\infty f(v + r\beta) dr$$



$$\beta = -(\cos(\eta + \theta), \sin(\eta + \theta))$$

## 2. Problème tomographique

Trouver la fonction  $f$  à partir de ses projections.

# 3. Solution classique

(Filtered BackProjection, FBP)

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s} [p_H(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$

$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds',$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

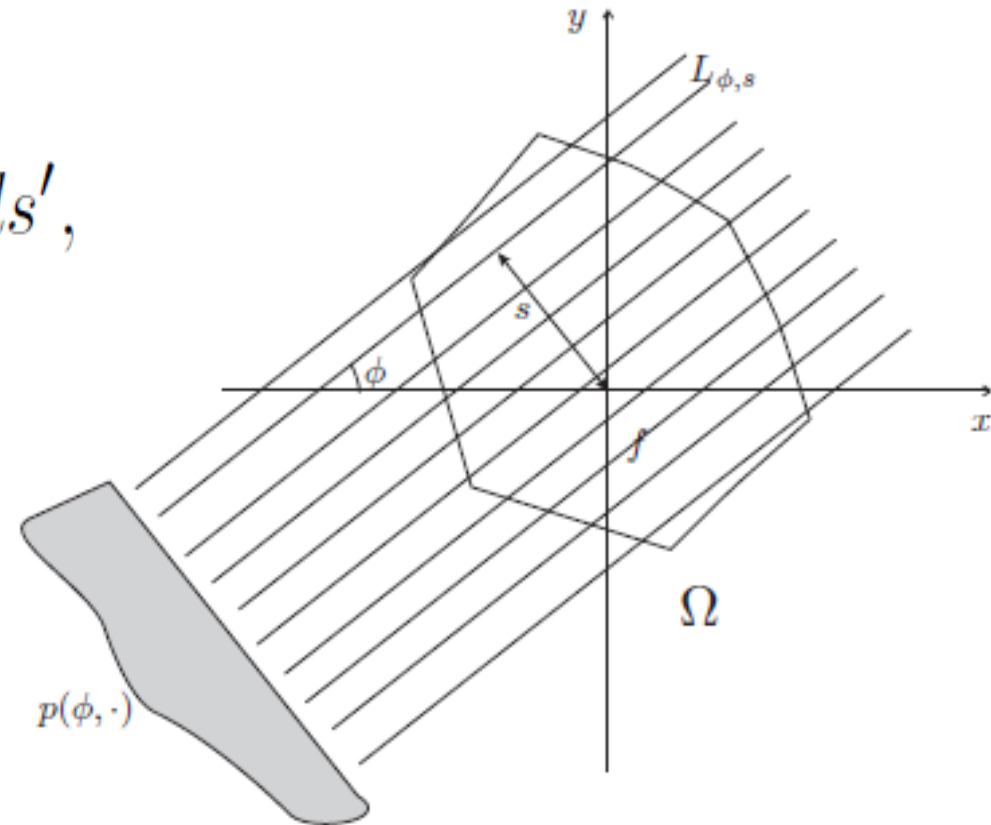
Filtrage+dérivation+rétroprojection



## Filtrage : Transformée de Hilbert en géométrie parallèle

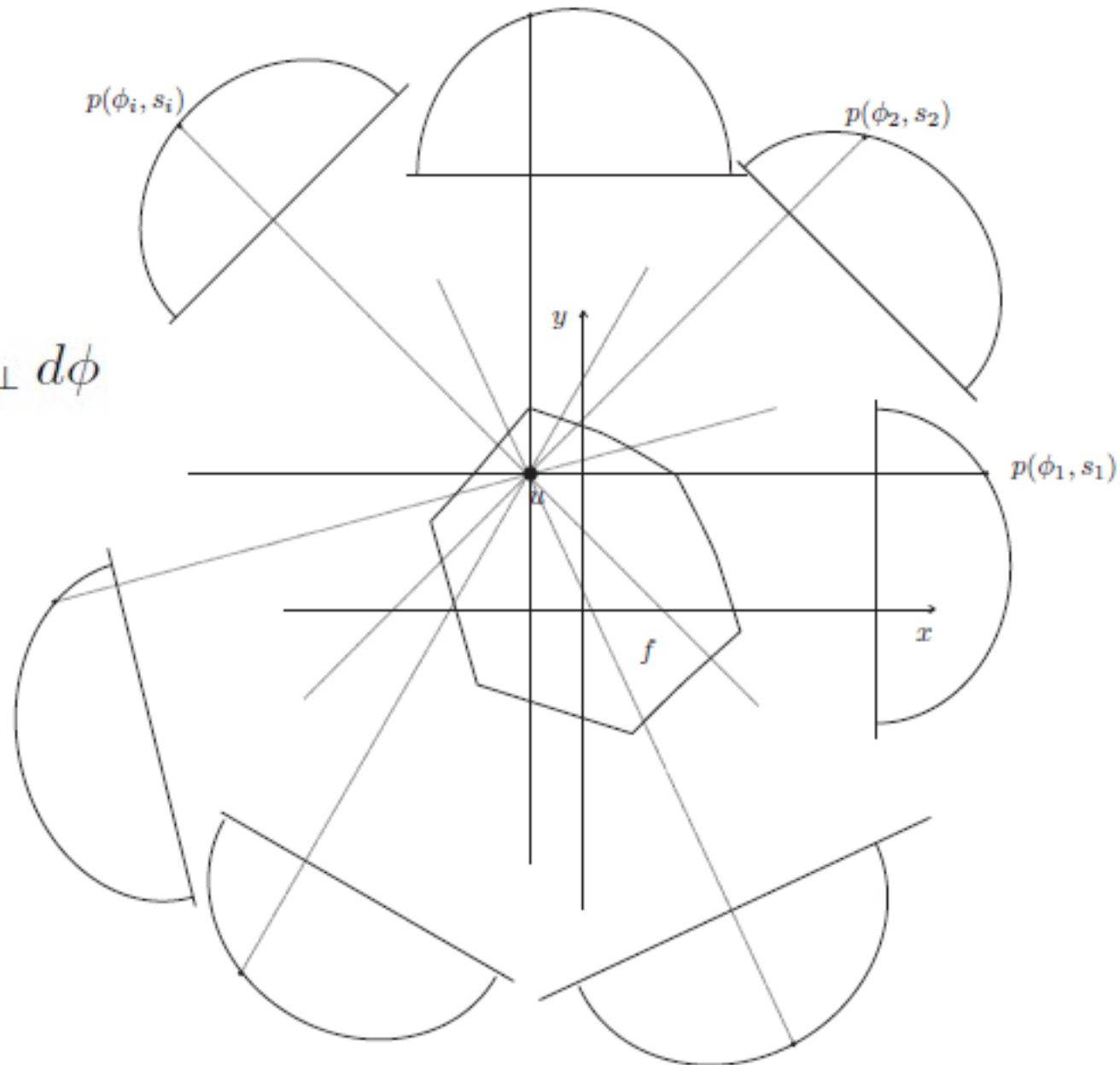
$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds',$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$



# Rétroprojection

$$b(u) = \int_0^\pi [p(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$



## 4. Données incomplètes

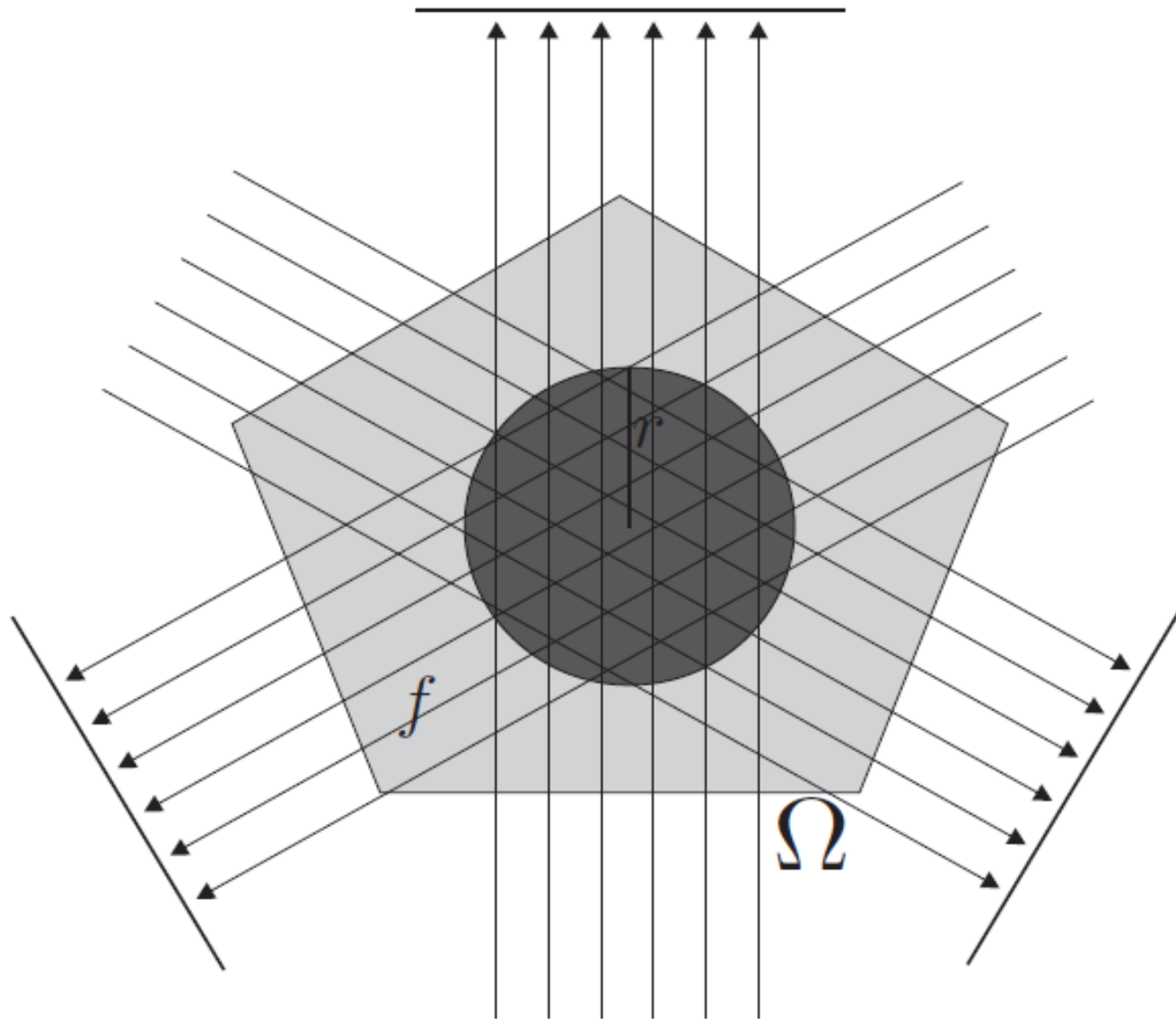
$$E_{trc} = \{(\phi, s) \in Z, p(\phi, s) \text{ est inconnue} \}$$

$$E_{trc}^{\circ} \neq \emptyset$$

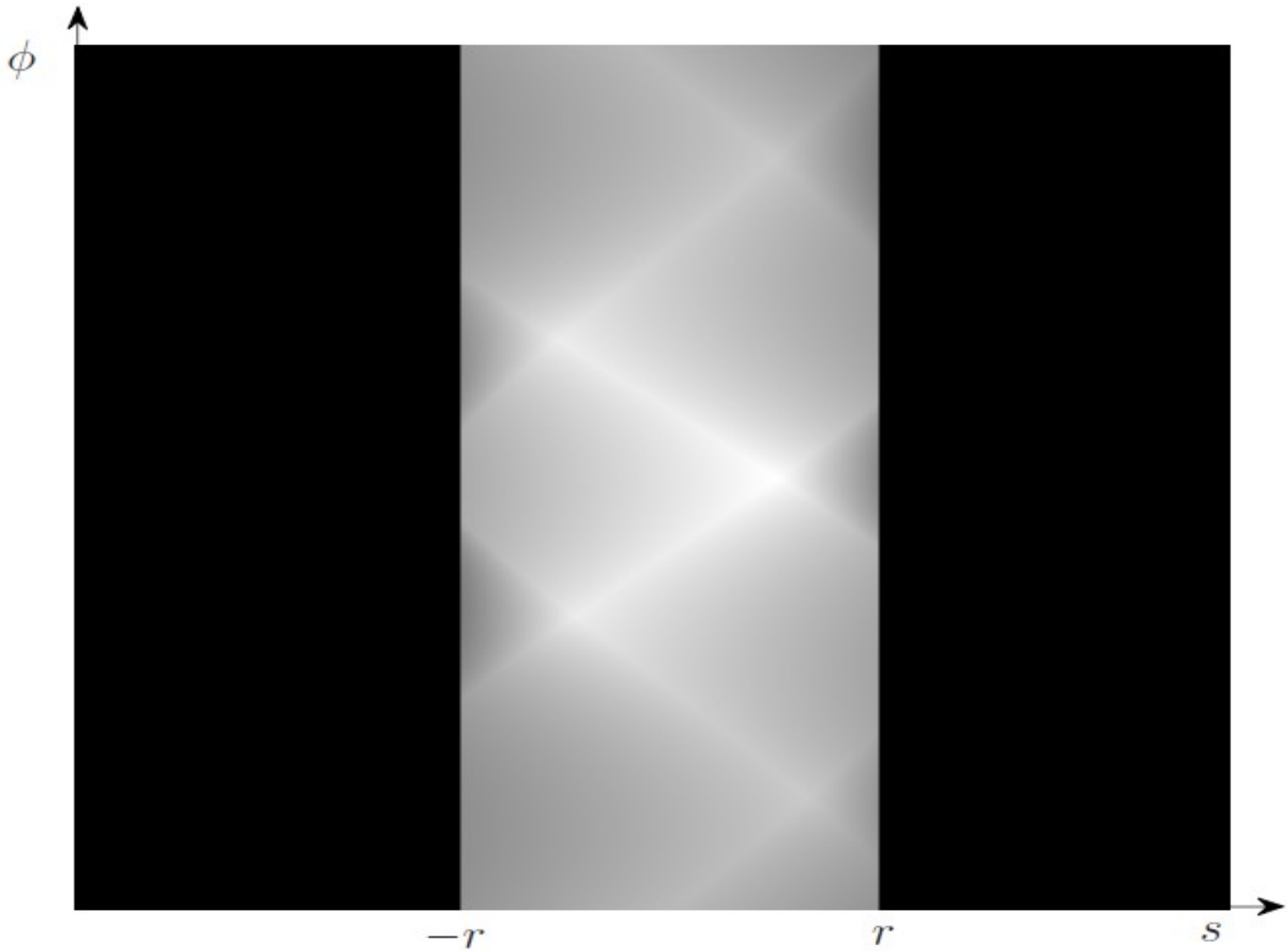
Existe-t-il une partie reconstructible ? Où se trouve-t-elle ?

# Exemples classiques

## Problème intérieur

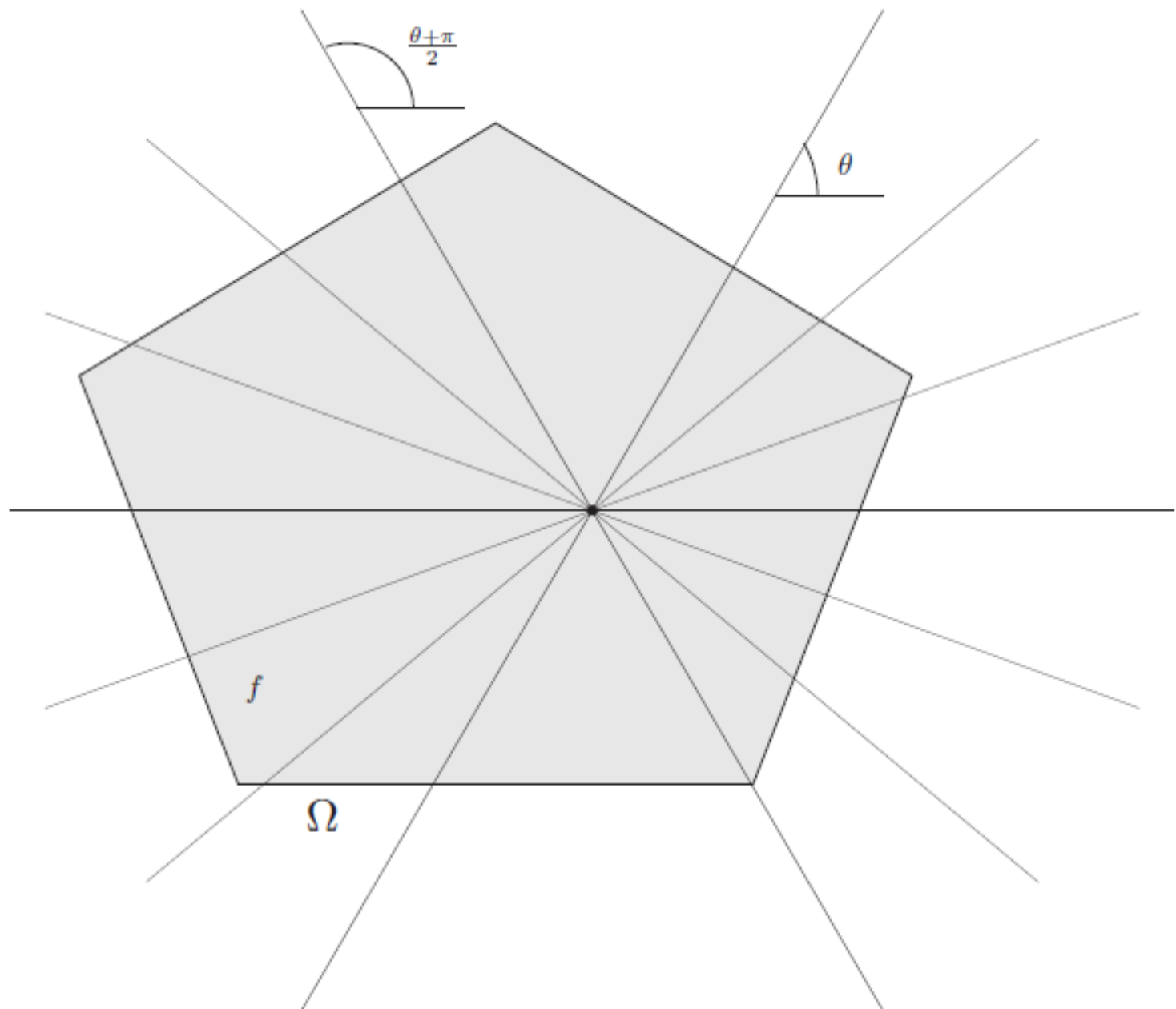


## Problème intérieur

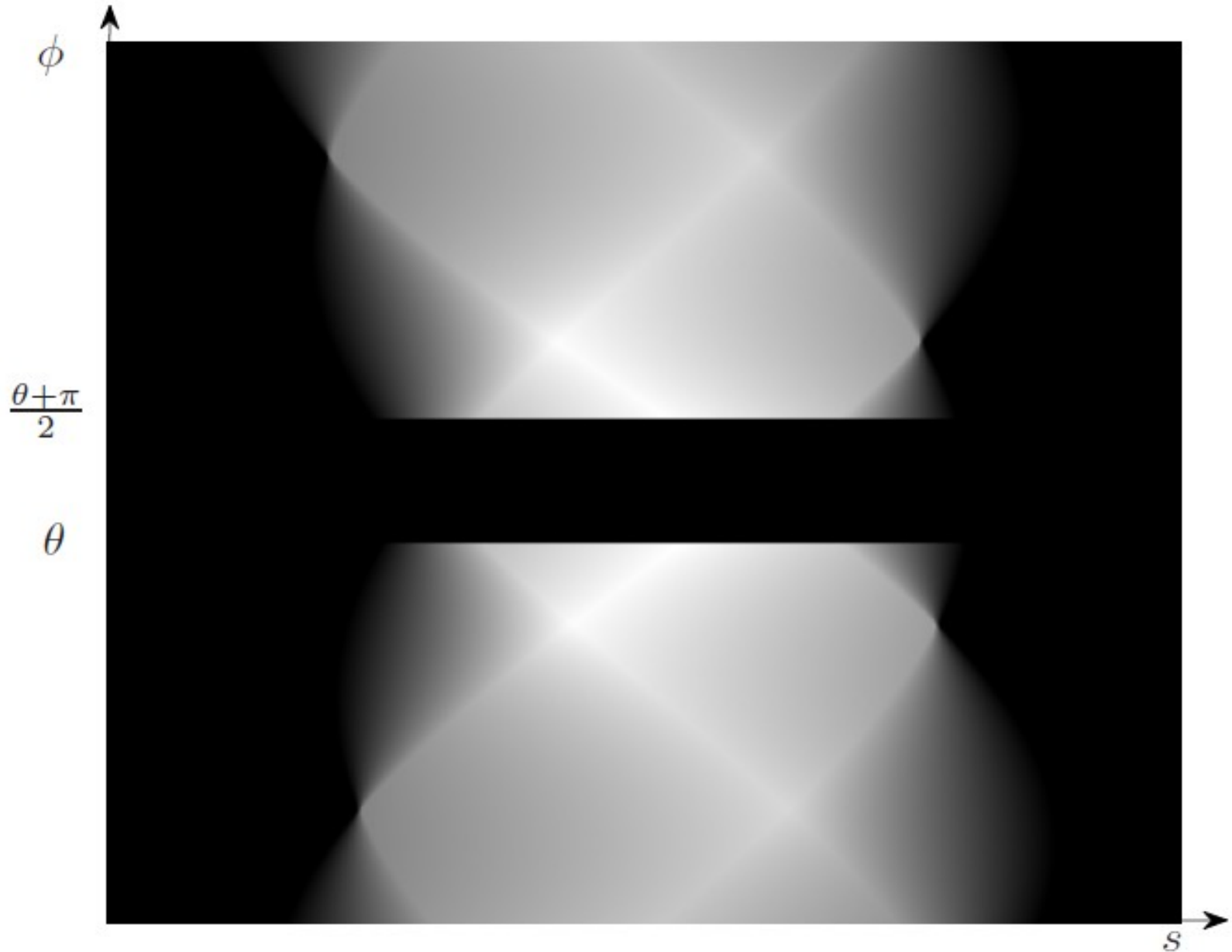


Pas d'unicité de solutions dans ce cas [Nat86].

# Problème à angle de vue limité

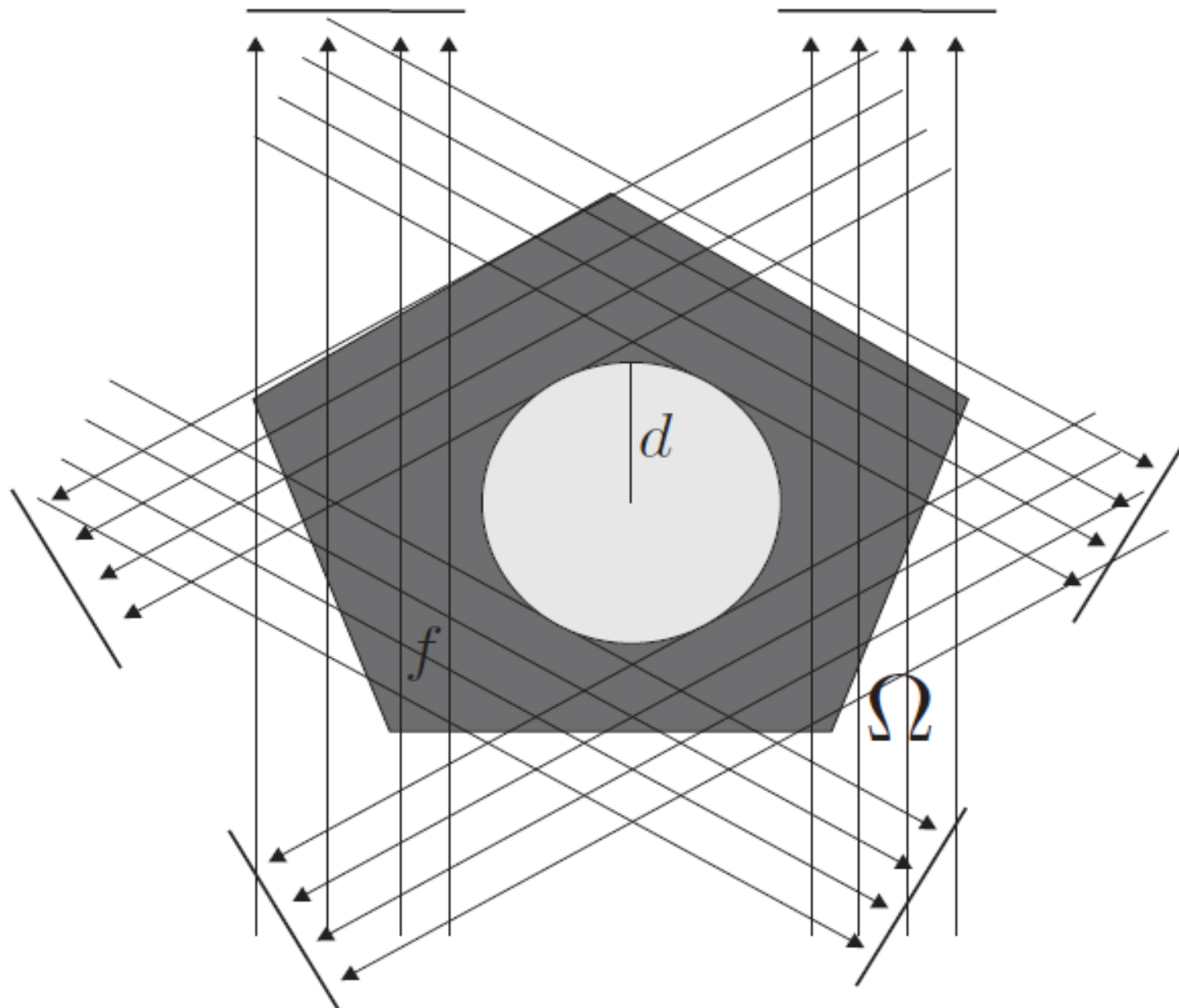


# Problème à angle de vue limité



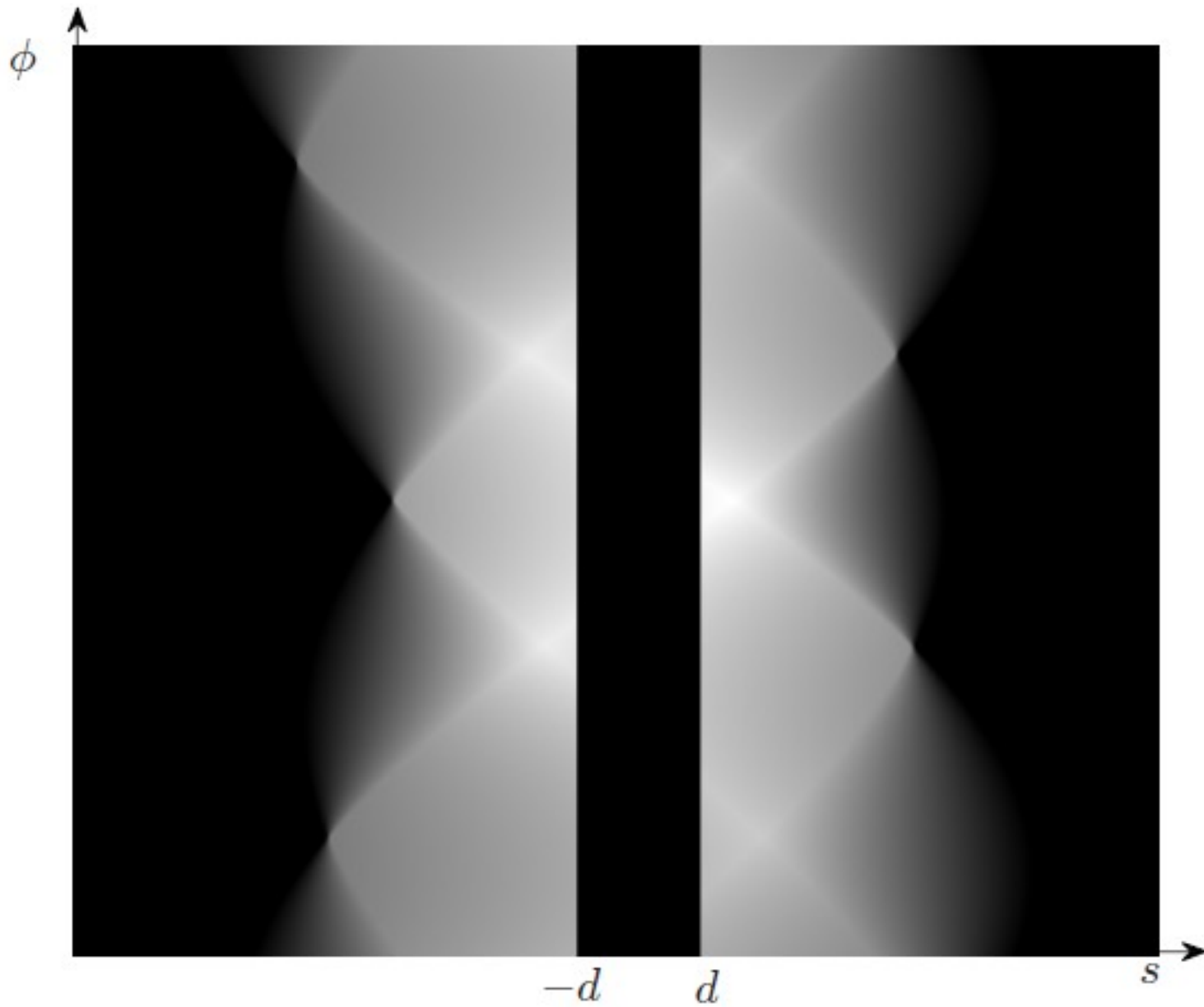
Pas de stabilité pour la solution [Nat86]

# Problème extérieur





# Problème extérieur



Pas de stabilité pour la solution [Nat86]

# Données incomplètes quelconques

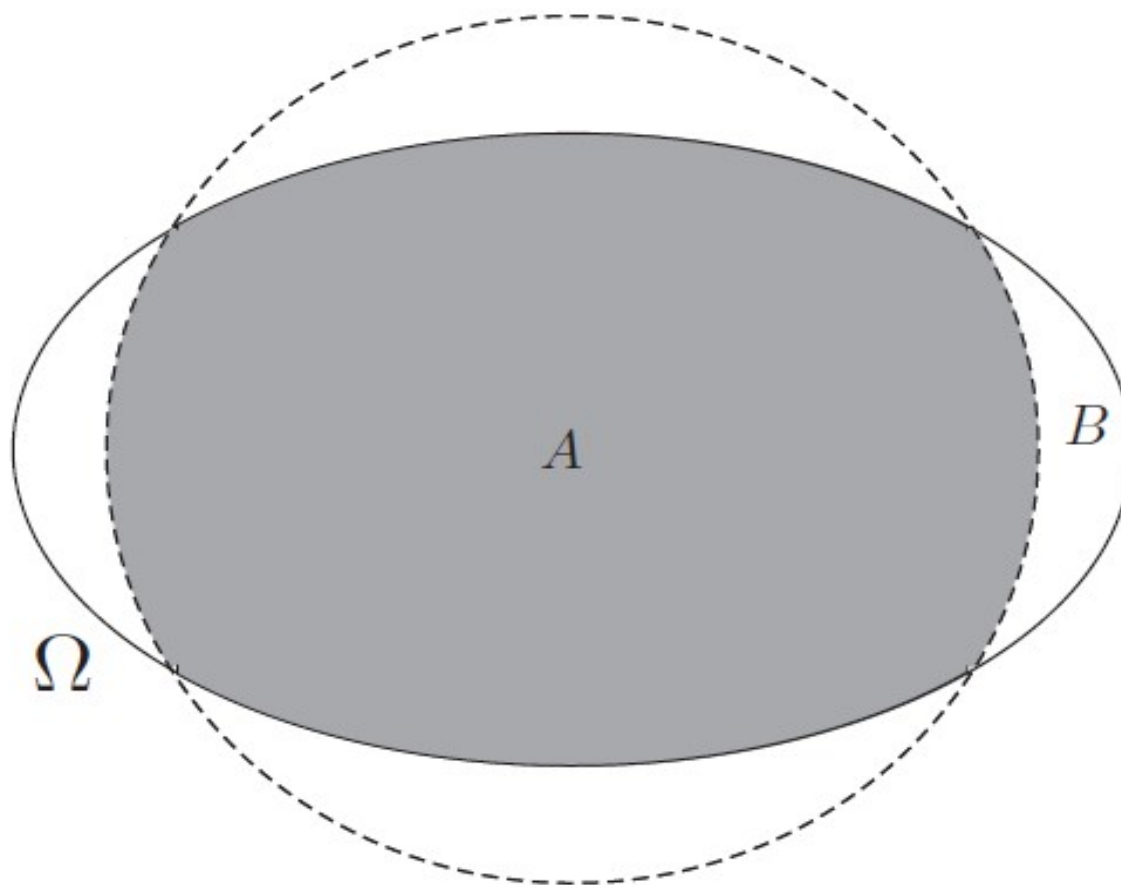
Régions  $A$  et  $B$

Le support de  $f$  est  $\Omega$

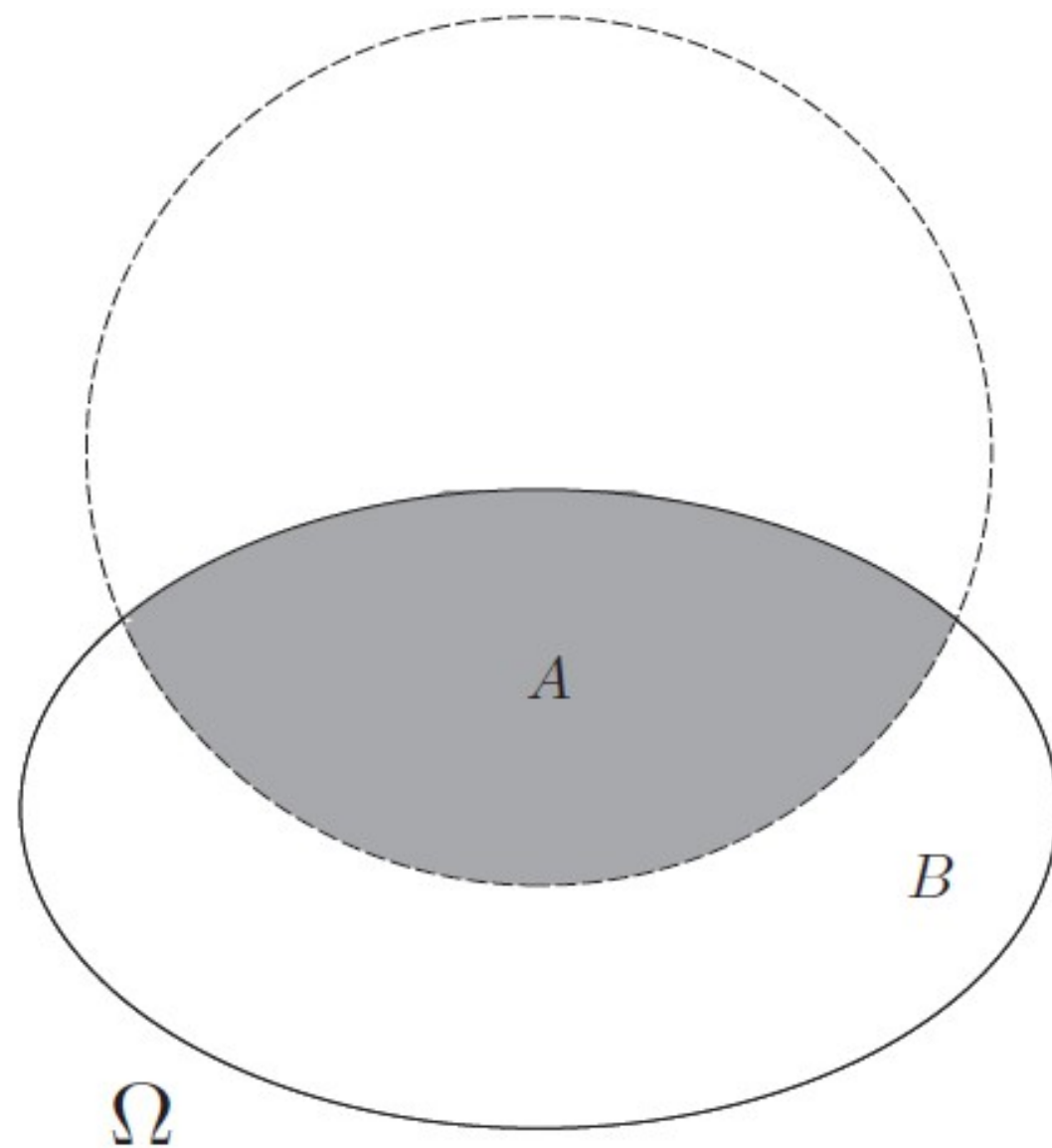
$$A = \Omega \setminus B$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \Omega : \exists (\phi, s) \in E_{trc}^{\circ} \text{ tel que } (x, y) \in L_{\phi, s} \right\}$$

Exemples des régions  $A$  et  $B$



Exemples des régions  $A$  et  $B$



# 5. Méthode de la (DBP)

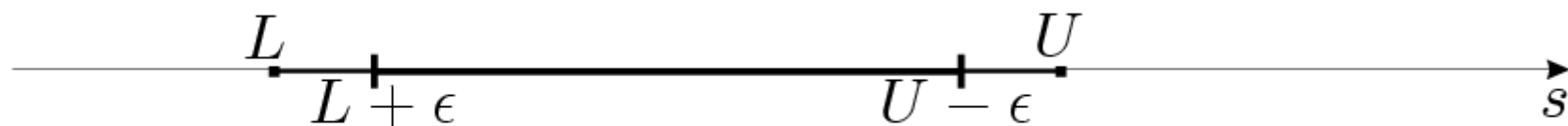
Differentiated Backprojection

Transformée de Hilbert en  $1D$

$$Hg(s) = \int_{\mathbb{R}} g(s - s')h(s')ds$$

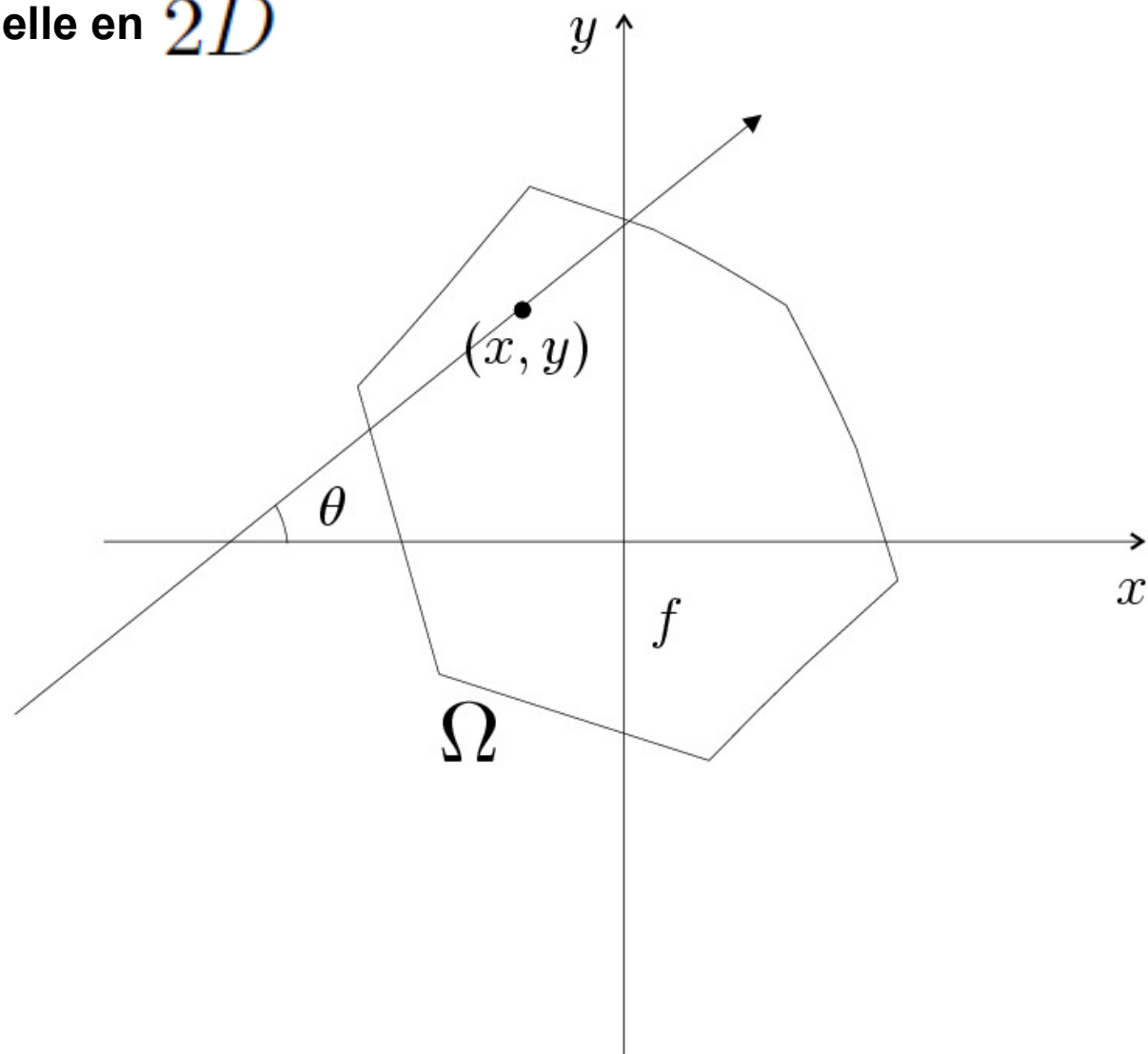
$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

## Inversion de la transformée de Hilbert



$$g(s) = \frac{-1}{\sqrt{(s-L)(U-s)}} \left( \int_L^U \sqrt{(s-L)(U-s)} \frac{Hg(s')}{\pi(s-s')} ds' + C \right)$$

## Transformée de Hilbert directionnelle en $2D$



$$H_{\theta} f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x - s \cos \theta, y - s \sin \theta) h(s) ds$$

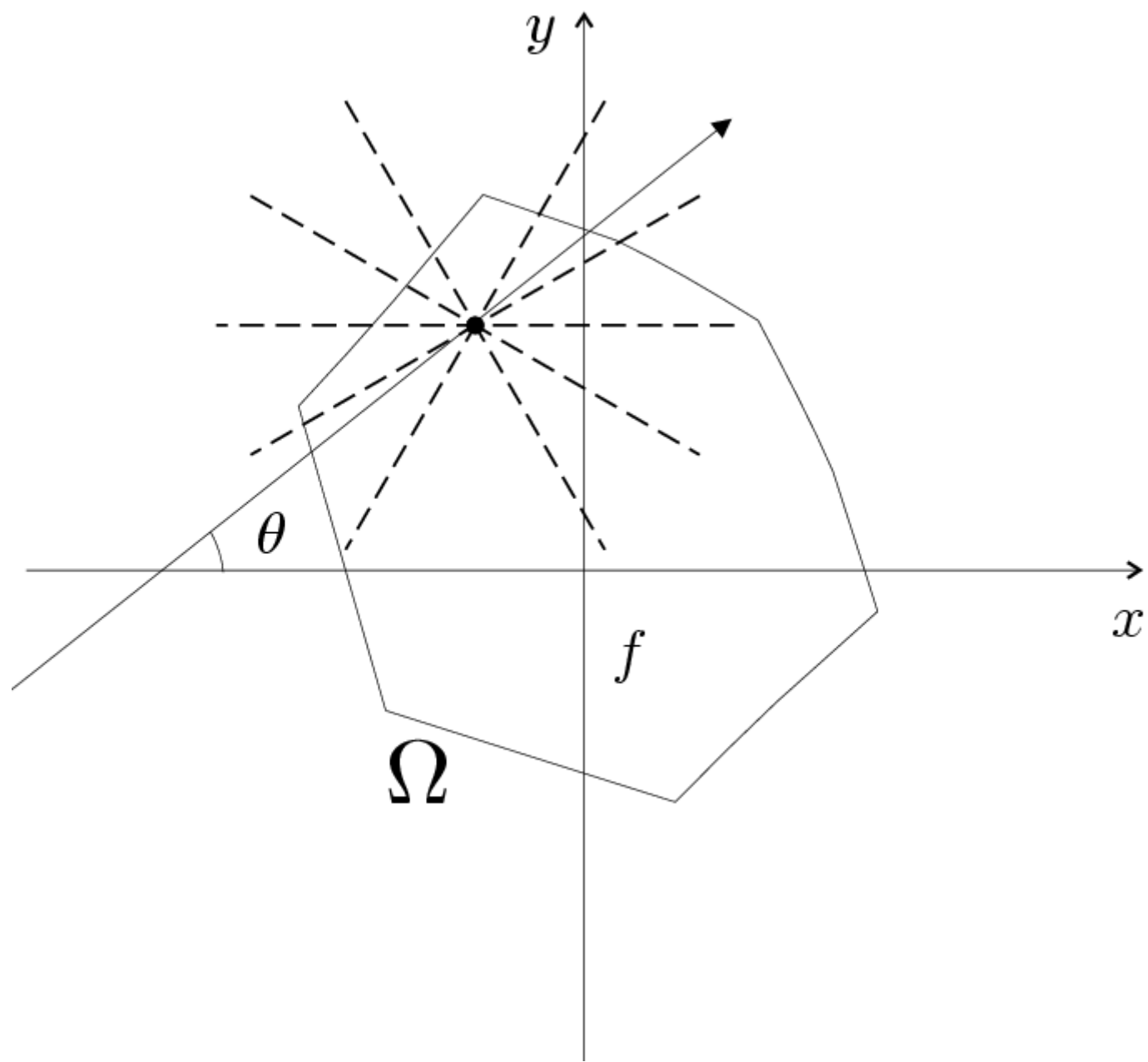
## Rétroprojection des dérivées de projections

$$b_{\theta}(x, y) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \frac{\partial}{\partial s} [p(\phi, s)]_{s=(x,y) \cdot \alpha^{\perp}} d\phi$$

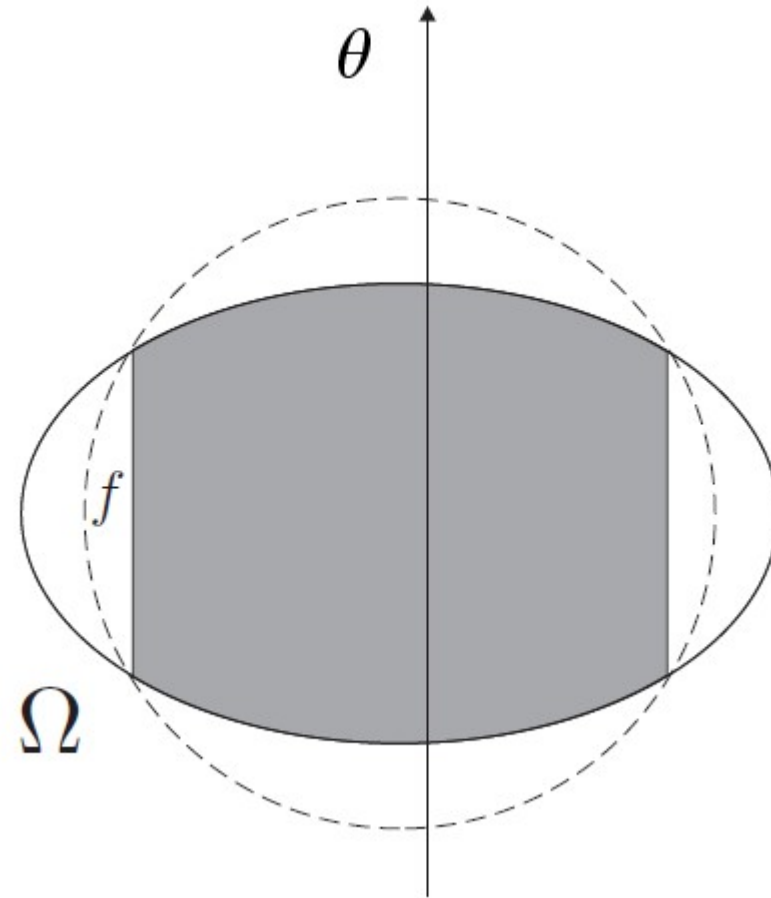


## Formule de la (DBP)

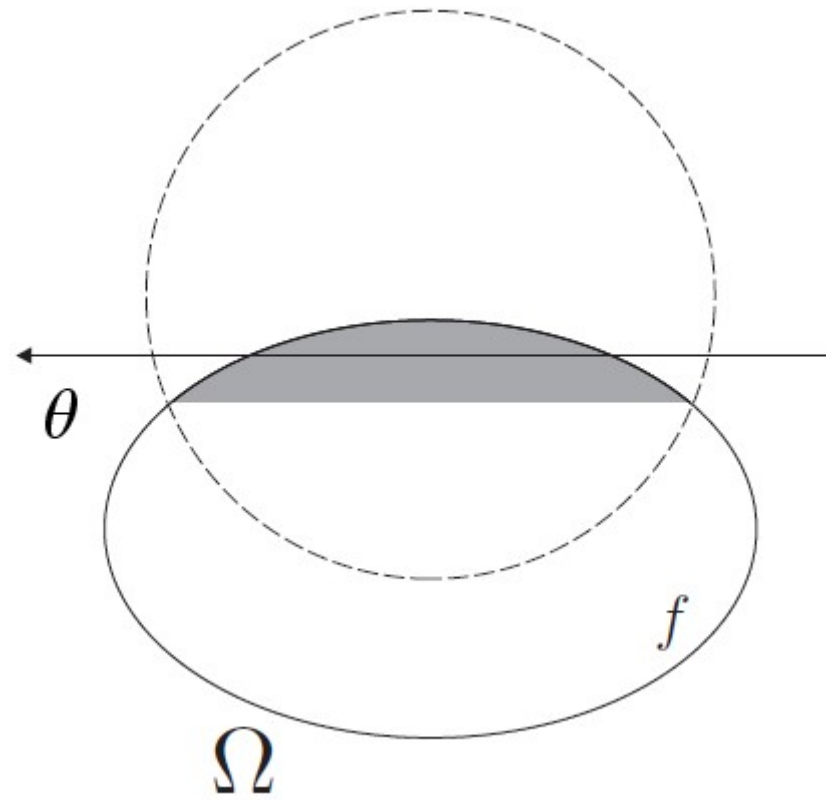
$$b_{\theta}(x, y) = 2\pi H_{\theta} f(x, y)$$



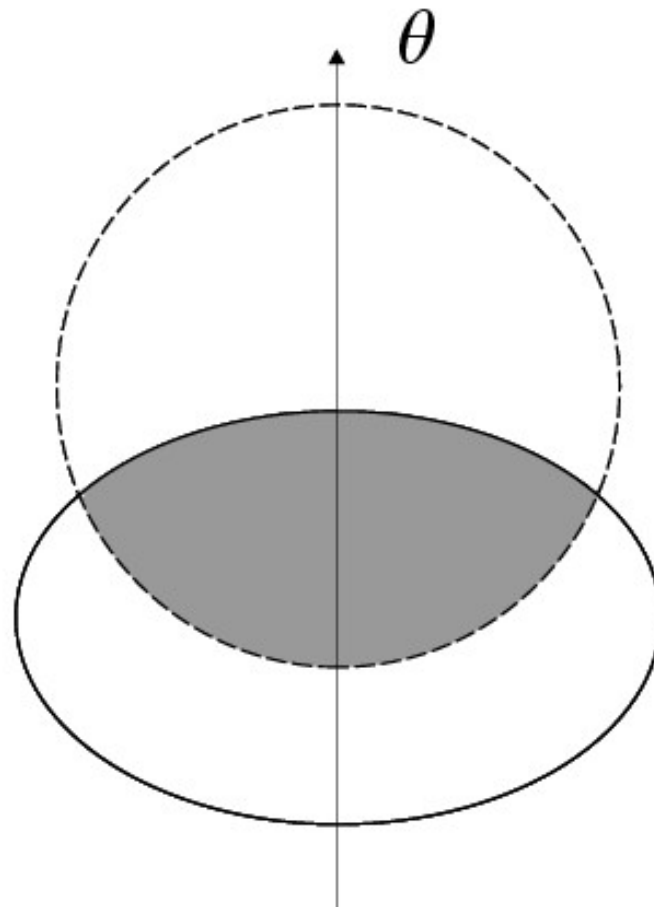
## La (DBP) et les données incomplètes



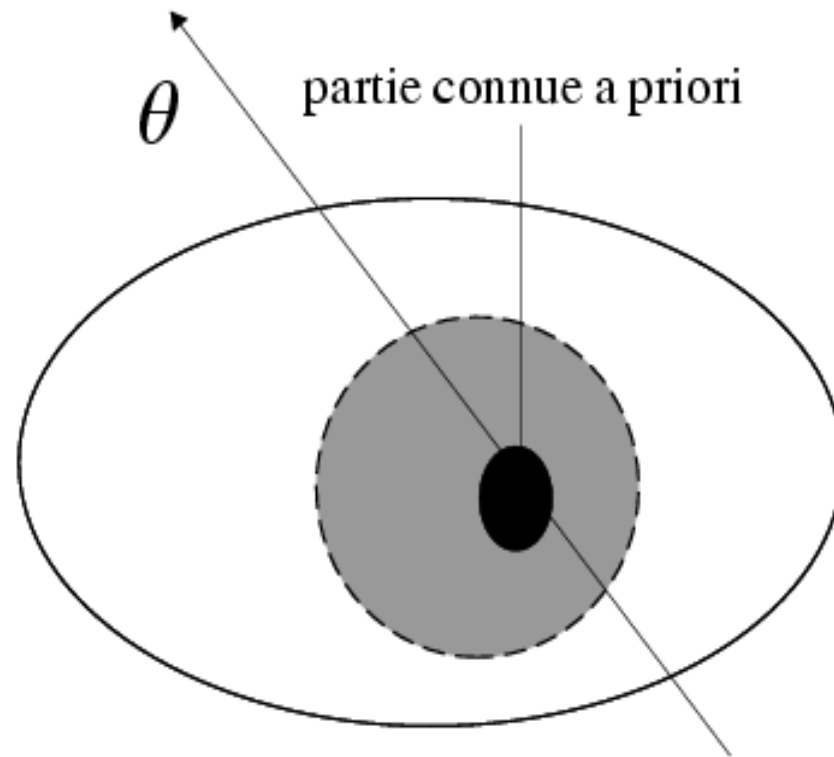
## La (DBP) et les données incomplètes



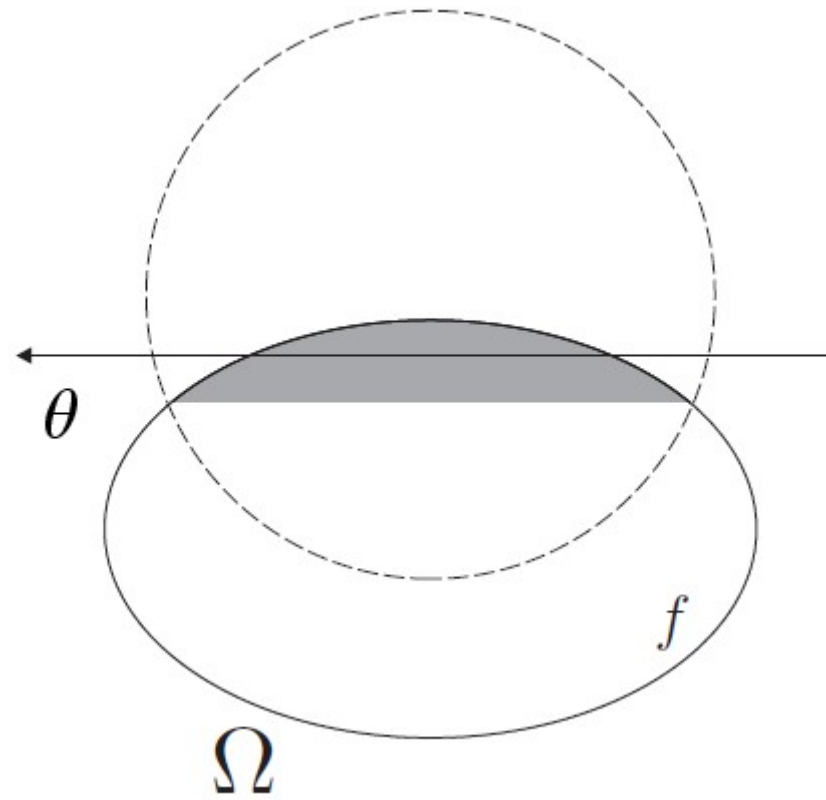
## La (DBP) et les données incomplètes



## La (DBP) et les données incomplètes



## La (DBP) et les données incomplètes



# 6. Méthode du fanbeam virtuel

FBP classique

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial s} [p_H(\phi, s)]_{s=u \cdot \alpha^\perp} d\phi$$

$$p_H(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} p(\phi, s') h(s - s') ds'$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$



# 6. Méthode du fanbeam virtuel

Transformée de Hilbert en fanbeam

$$g_H(v, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(d, \eta, \theta') h(\sin(\theta - \theta')) d\theta'$$

$$h(s) = \frac{1}{\pi s}$$

## Formule de changement pour la transformée de Hilbert

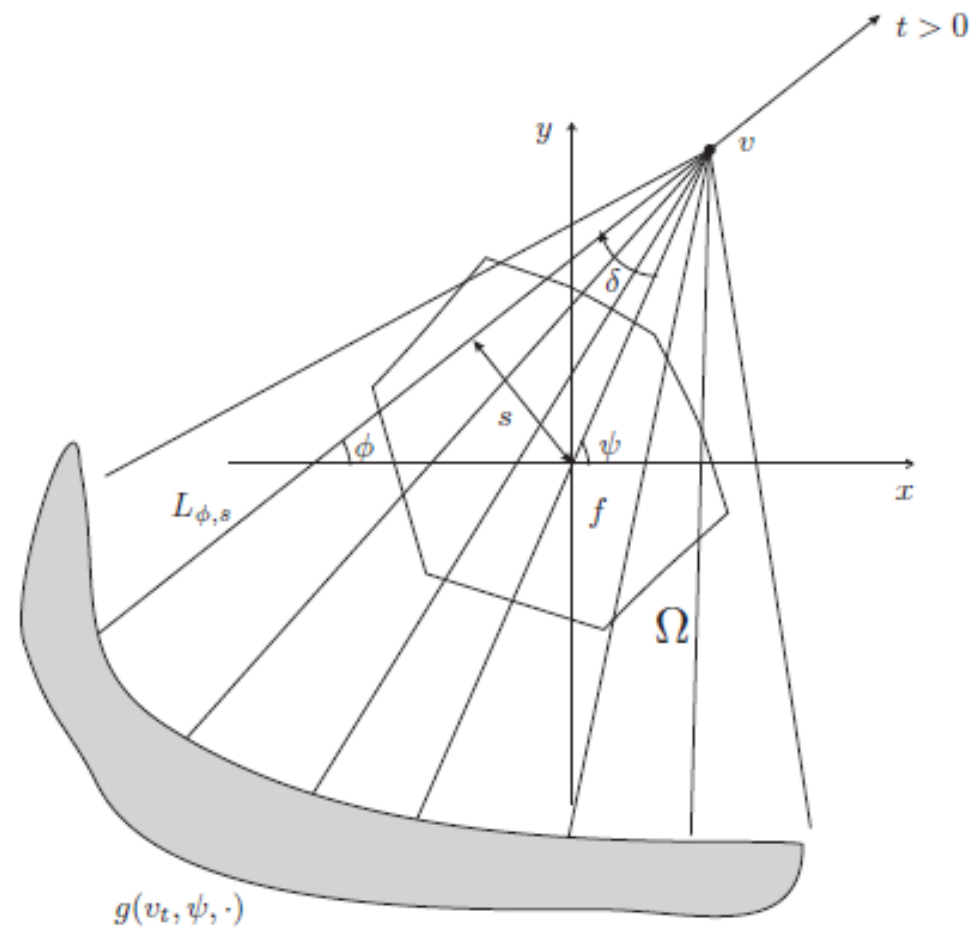
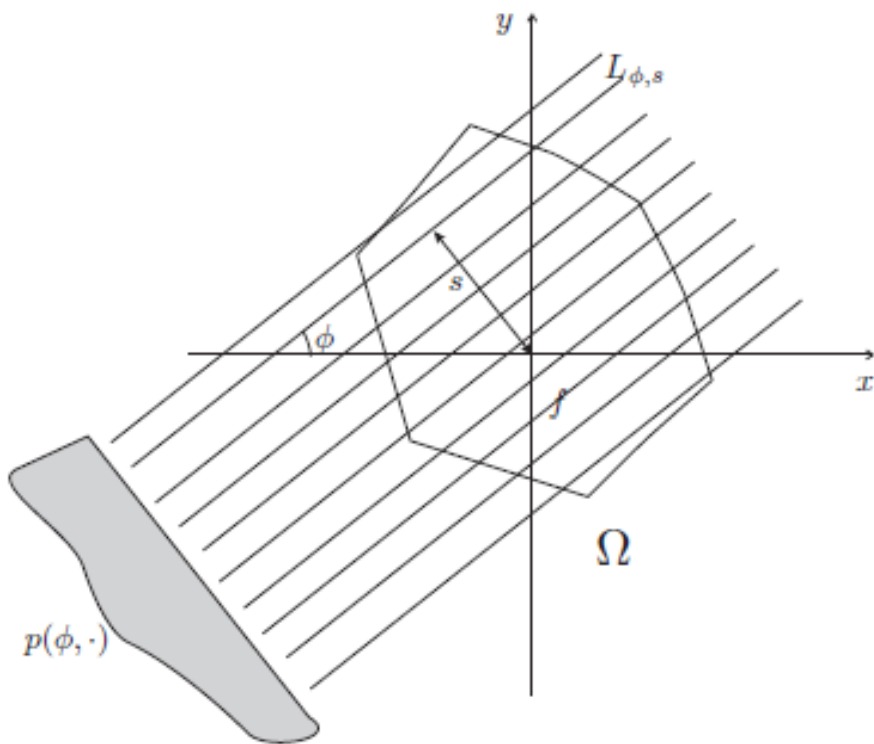
$$\phi \in [0, \pi), \ s \in \mathbb{R}, \ v \in L_{\phi, s} \setminus \Omega$$

$$p_H(\phi, s) = -\operatorname{sgn}(t) g_H(v, \delta)$$

$$t = v \cdot (\cos \phi, \sin \phi)$$

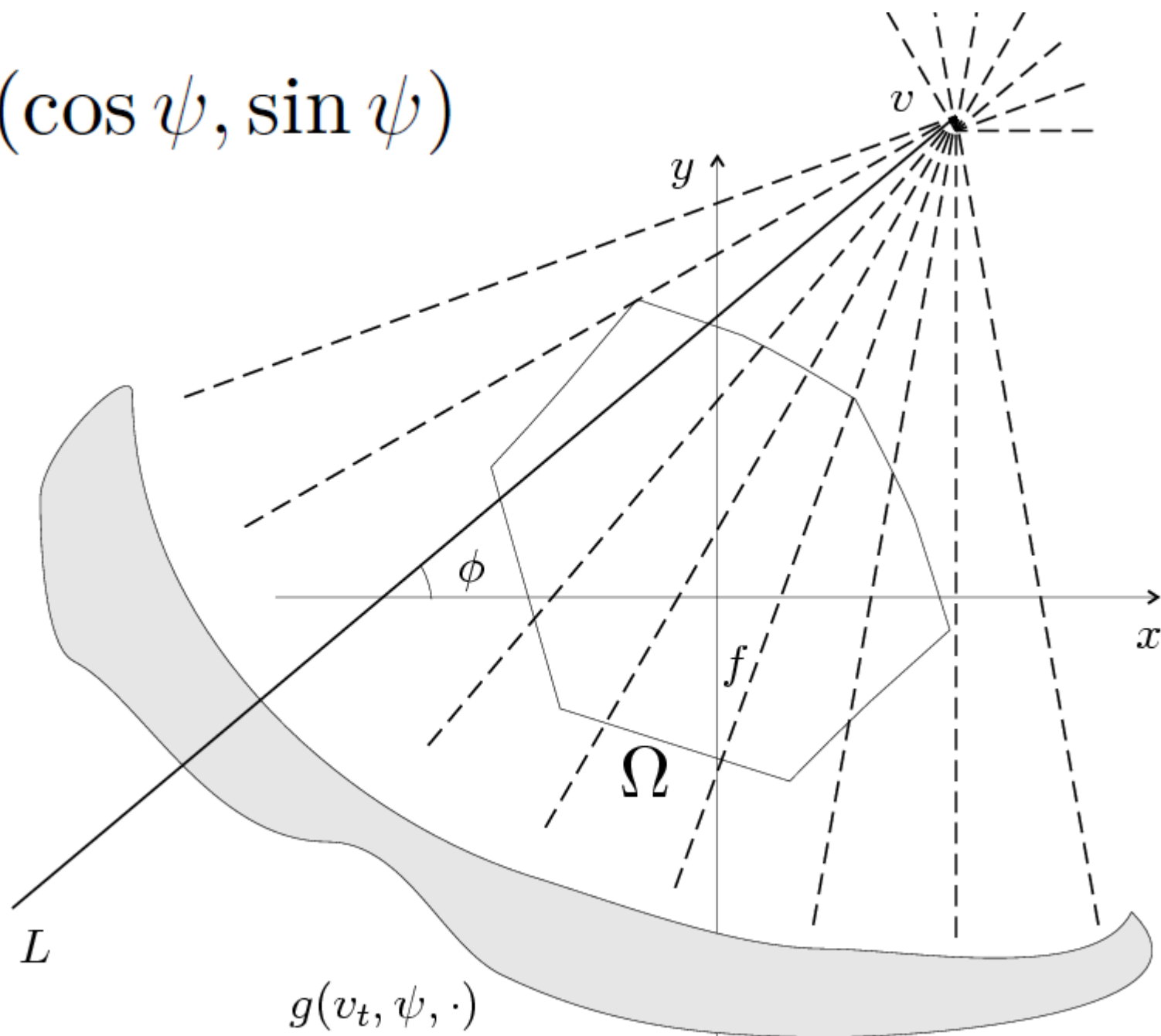
$$\delta = -\operatorname{sgn}(t) \sin^{-1} \frac{s}{\sqrt{t^2 + s^2}}$$

# Formule de changement pour la transformée de Hilbert



## Projections fanbeam virtuelles

$$v = v_t(\cos \psi, \sin \psi)$$



## Fanbeam virtuel et données incomplètes

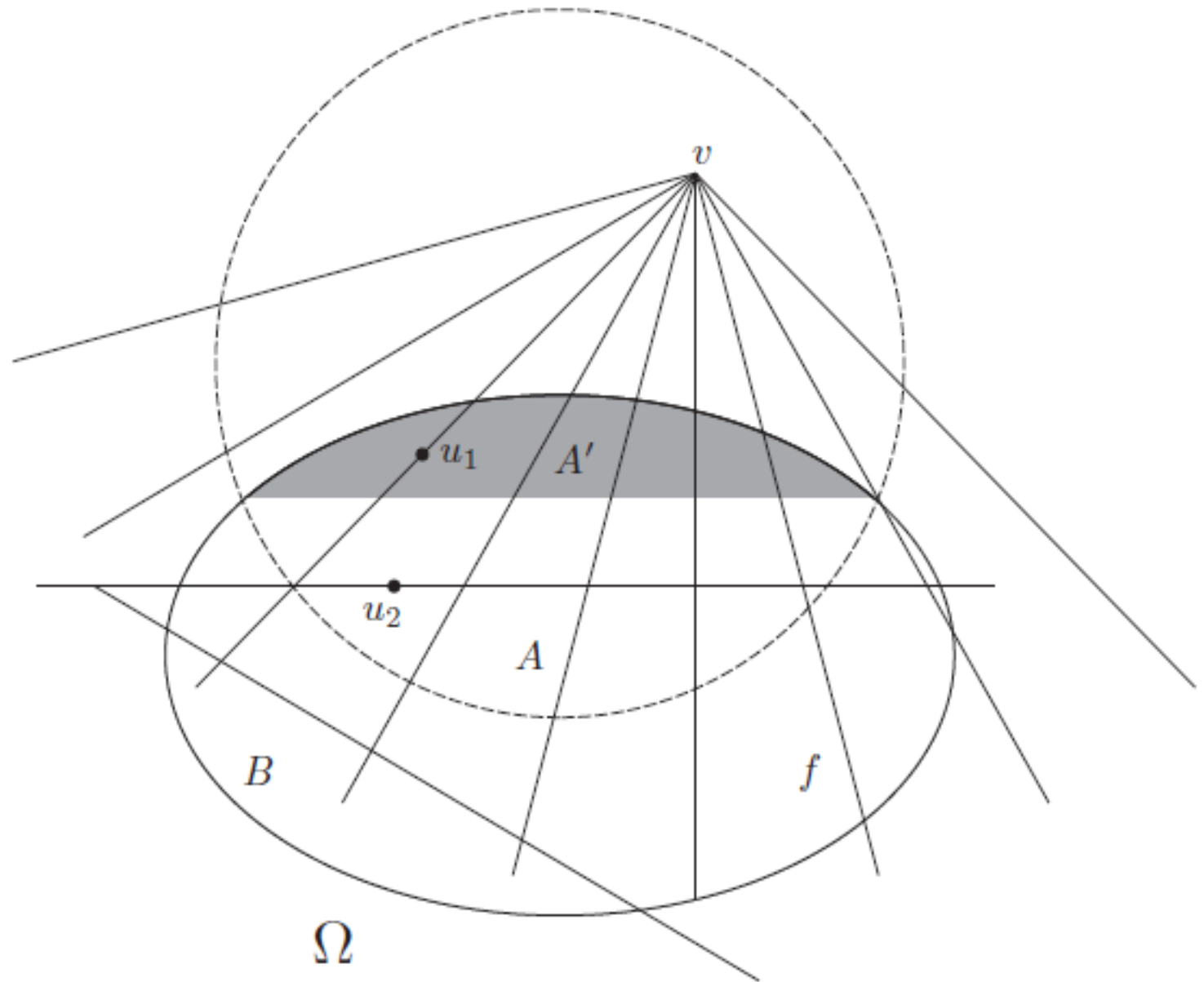
Région  $A'$

$$A' \subset A$$

$\forall L \subset \mathbb{R}^2$  une ligne on a

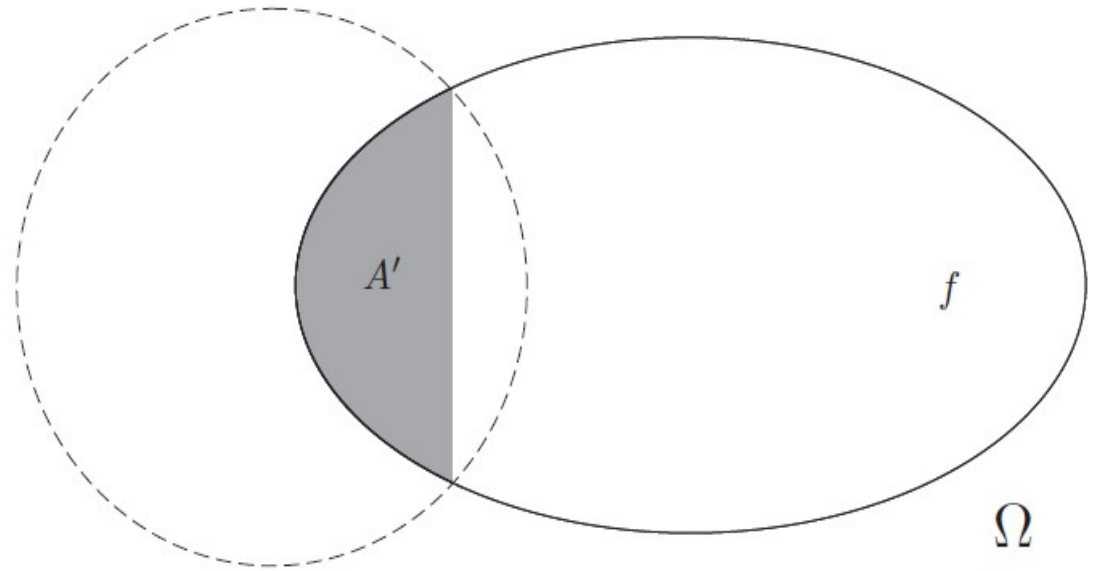
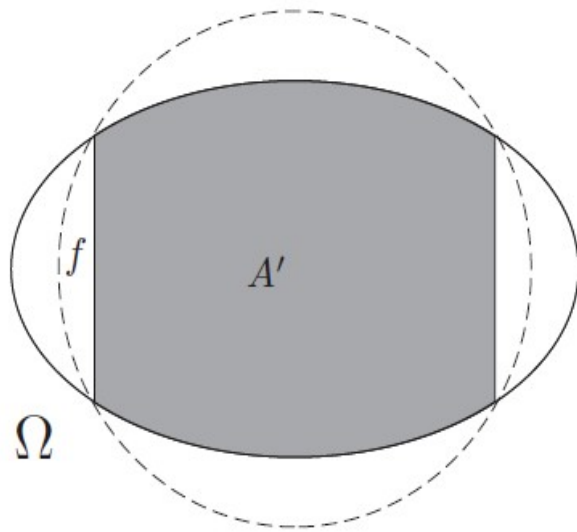
- Soit  $L \cap A' = \emptyset$
- Soit il existe  $v = v_t(\cos \psi, \sin \psi) \in L \setminus \Omega$  tel que la projection fanbeam virtuelle de vertex virtuel  $g(v_t, \psi, \cdot)$  soit mesurée.

Région  $A'$



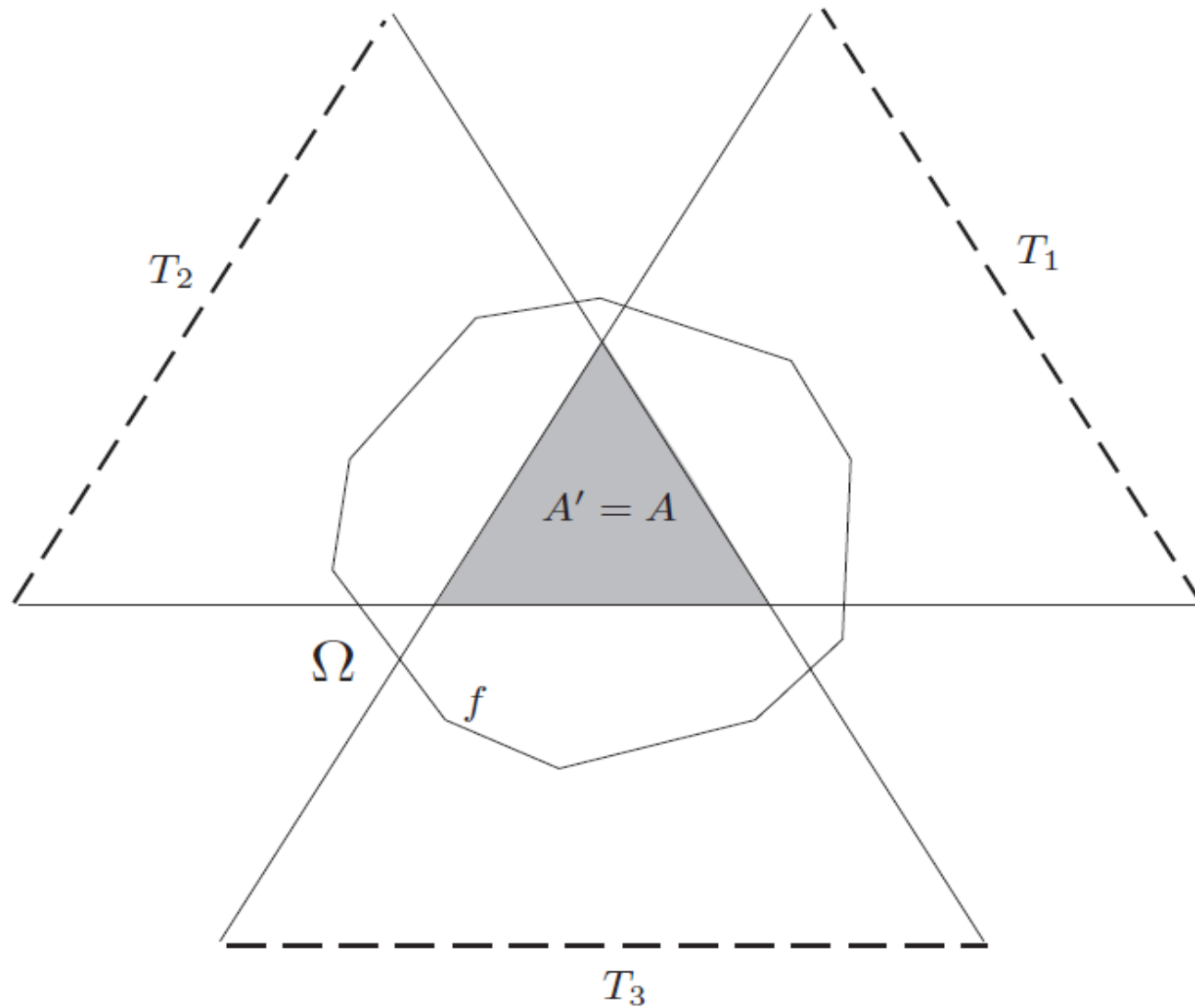
La région  $A'$  est reconstructible par la méthode du fanbeam virtuel

## Exemples de reconstruction à partir de données incomplètes



La région  $A'$  est reconstituée par la méthode du fanbeam virtuel

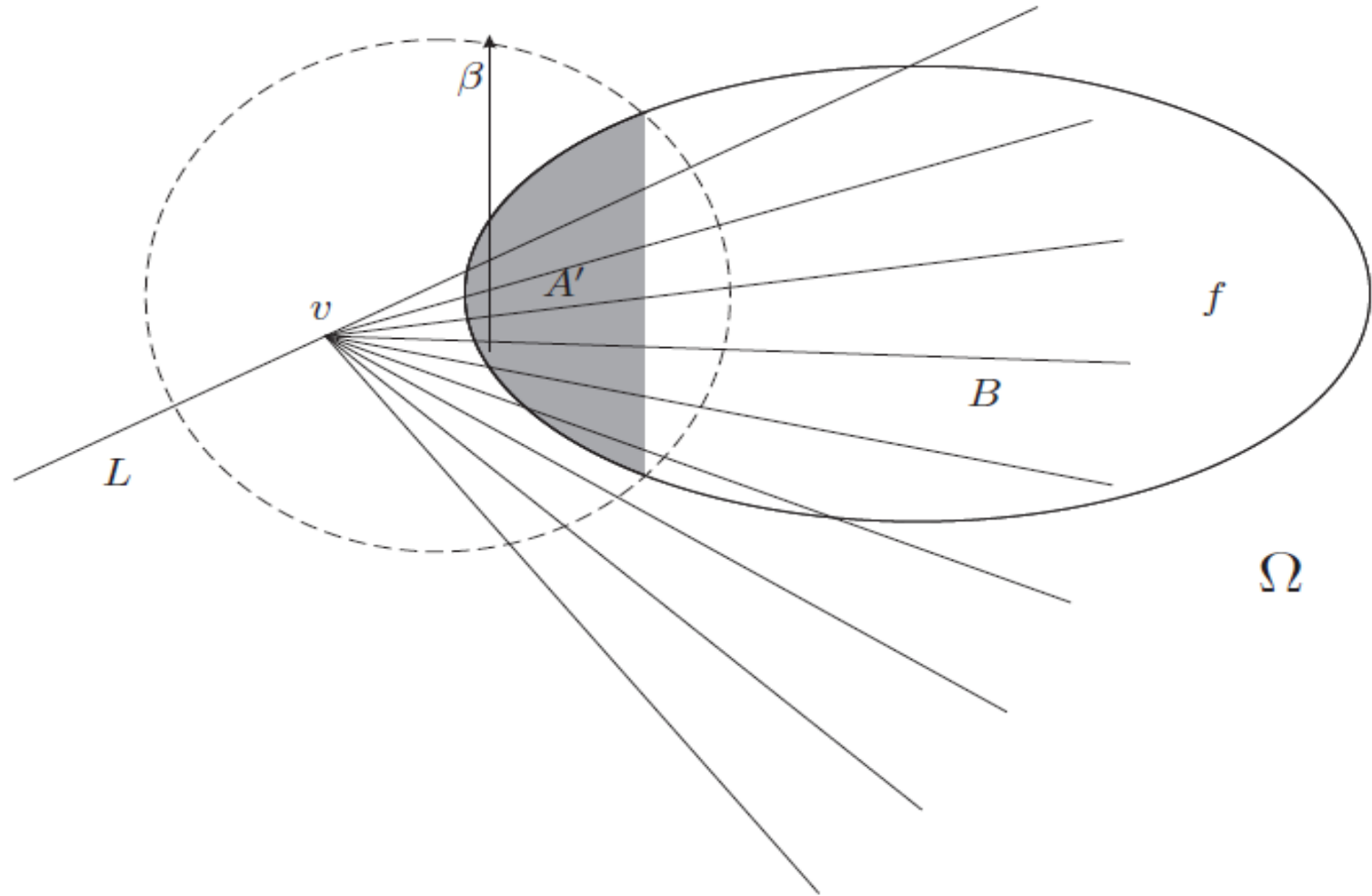
## Exemples de reconstruction à partir de données incomplètes



La région  $A'$  est reconstituable par la méthode du fanbeam virtuel

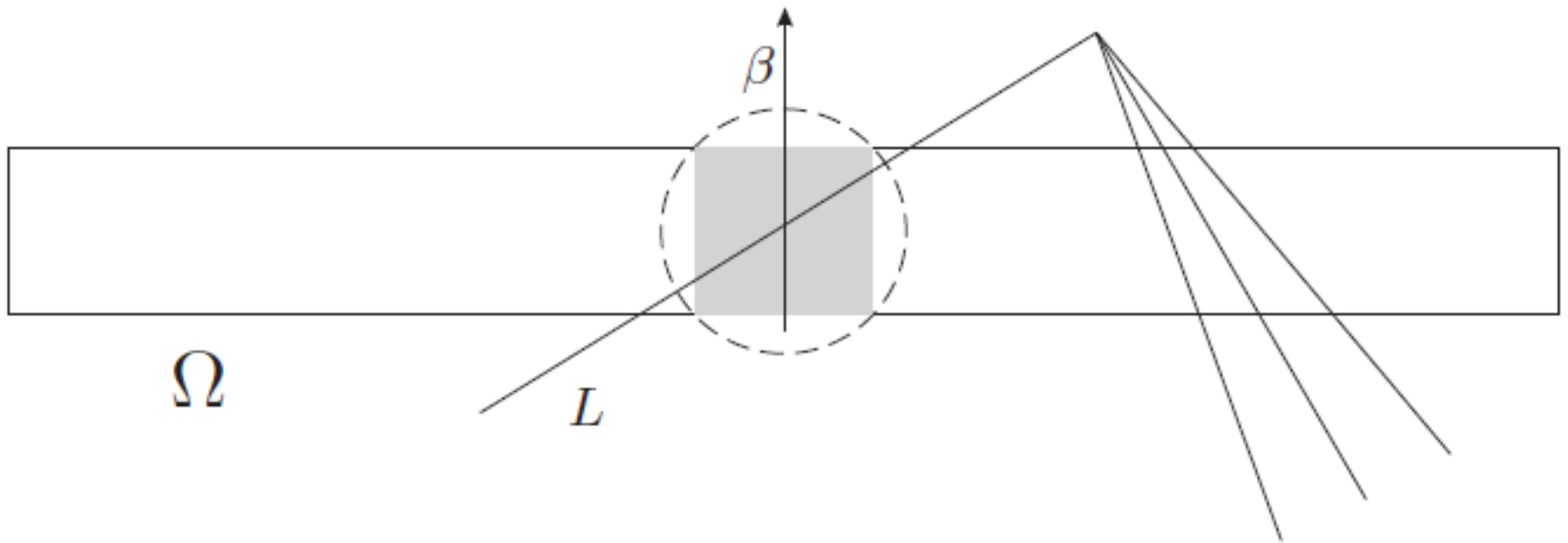


# 7. Comparaison de deux méthodes



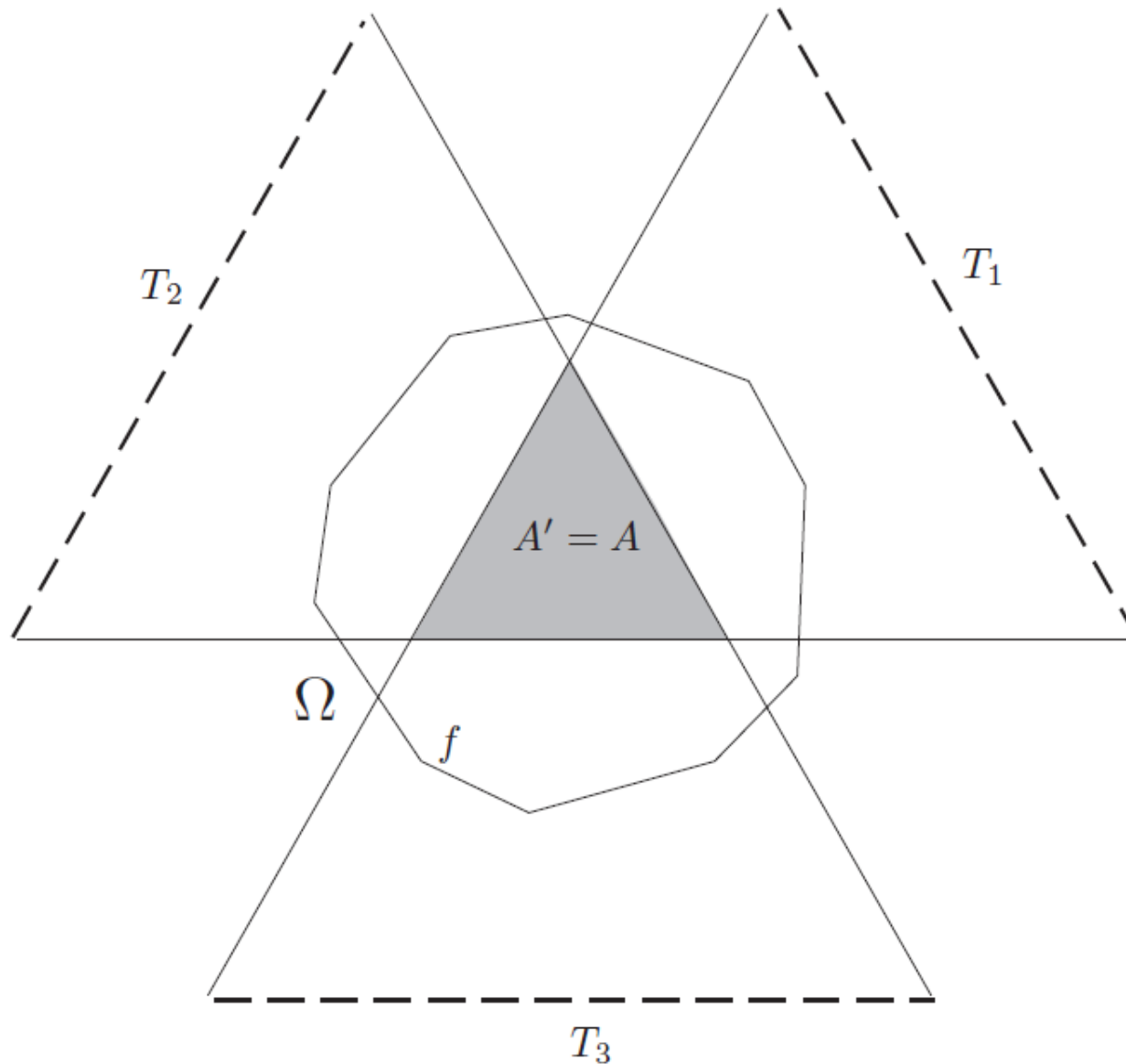
Les deux méthodes sont applicables

# 7. Comparaison de deux méthodes



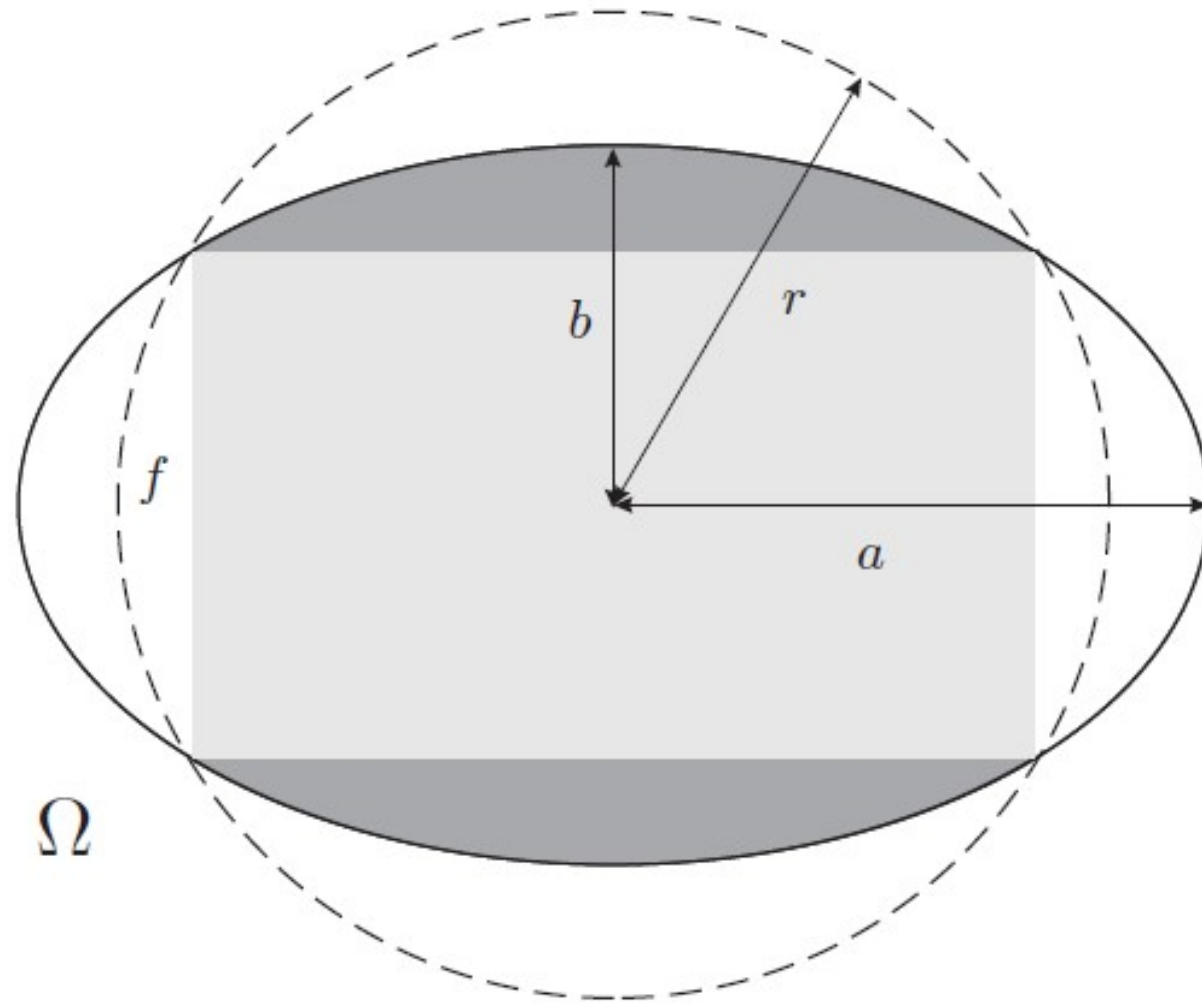
Seule la méthode de (DBP) qui est applicable

# 7. Comparaison de deux méthodes



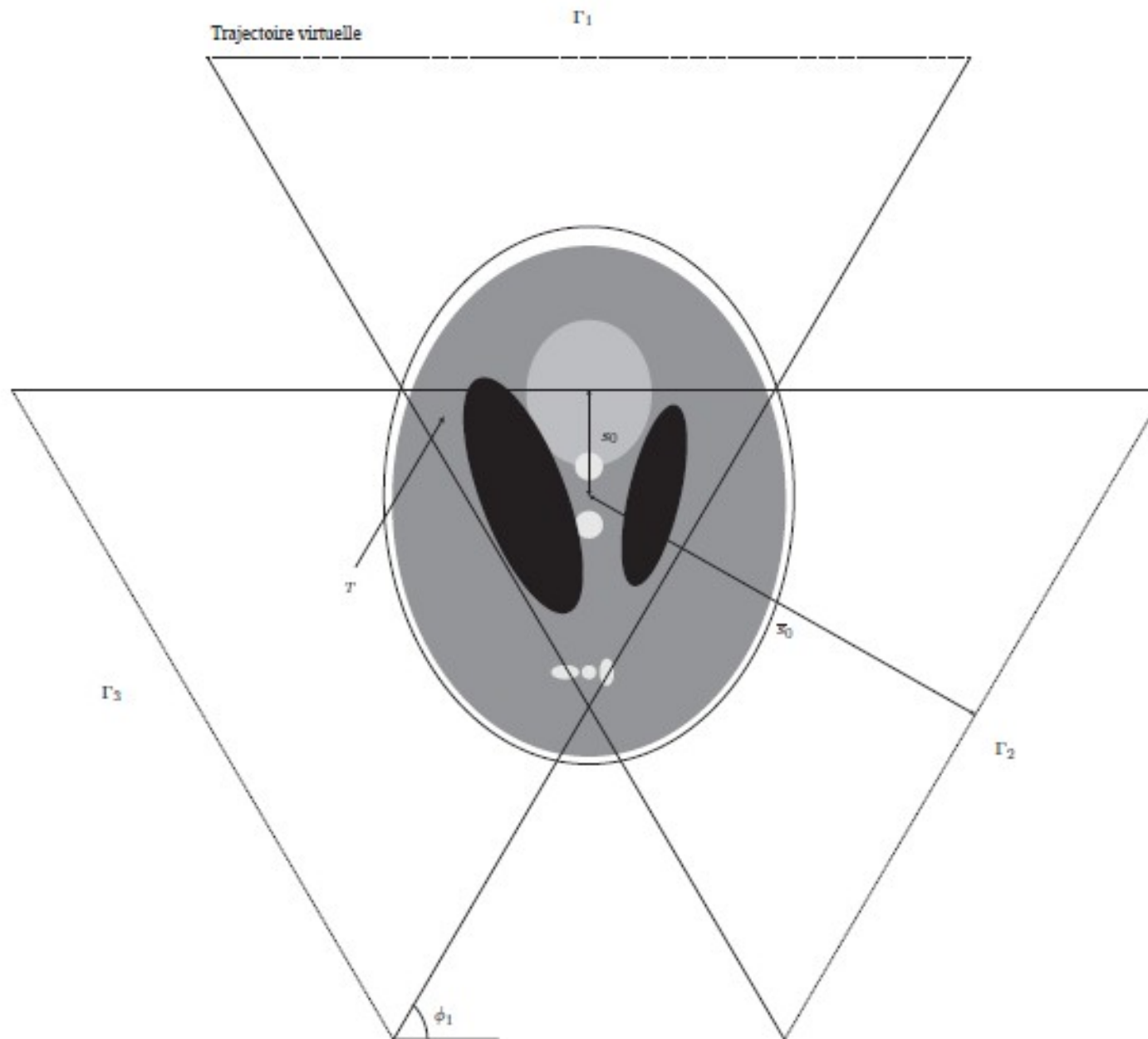
Seule la méthode du fanbeam virtuel qui est applicable

# 7. Comparaison de deux méthodes

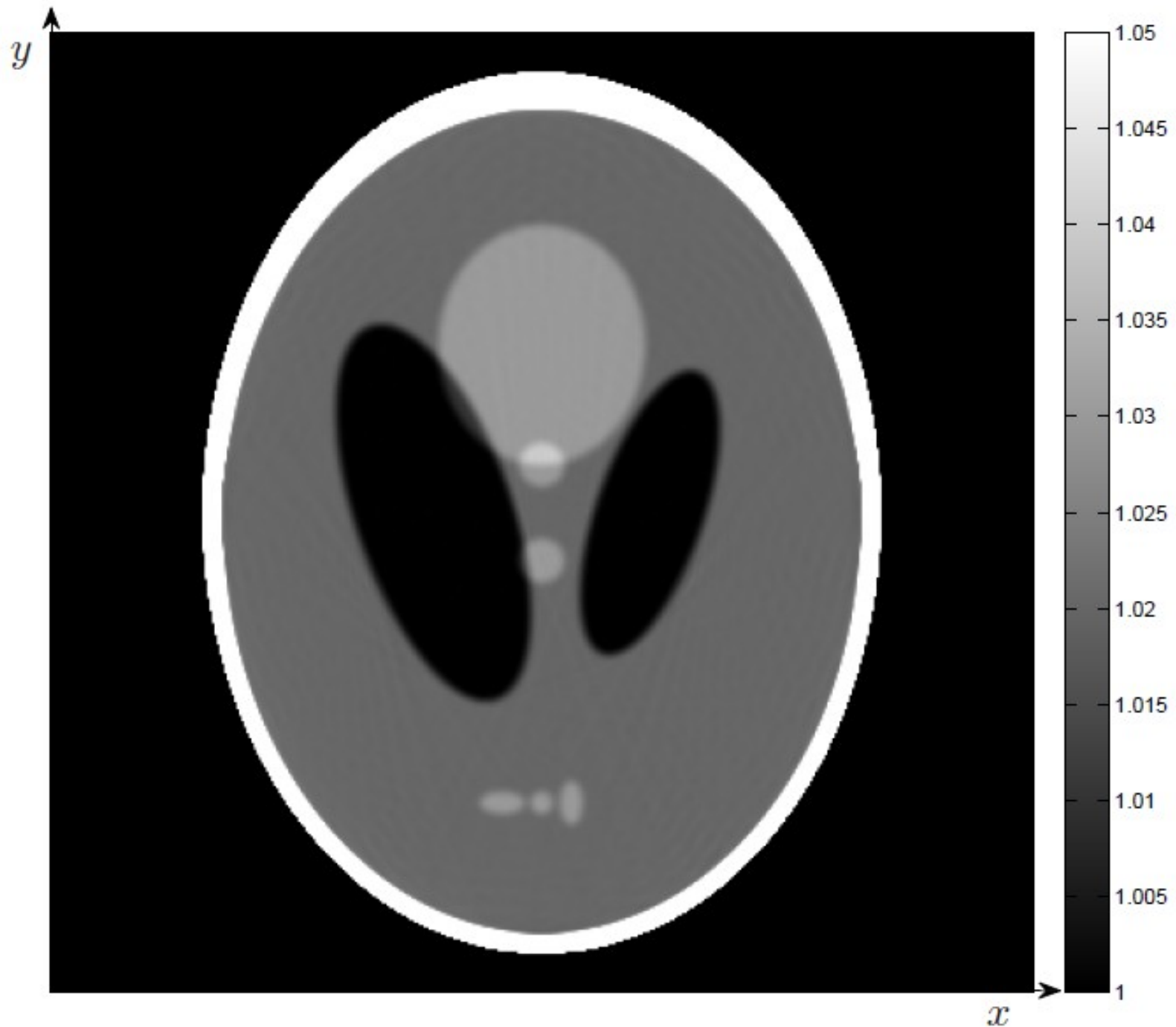


Chacune de deux méthodes peut être appliquées

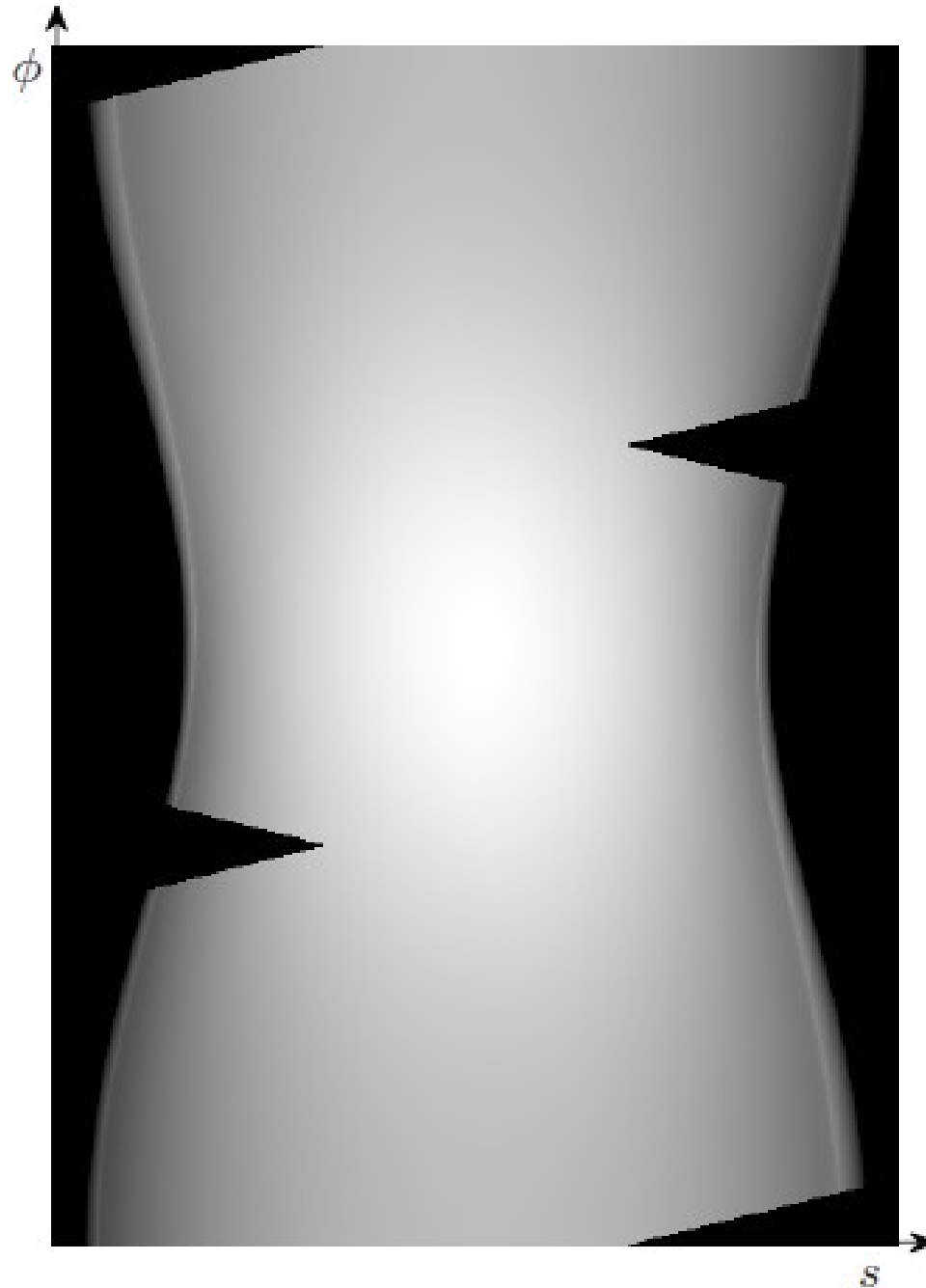
## 8. Quelques résultats



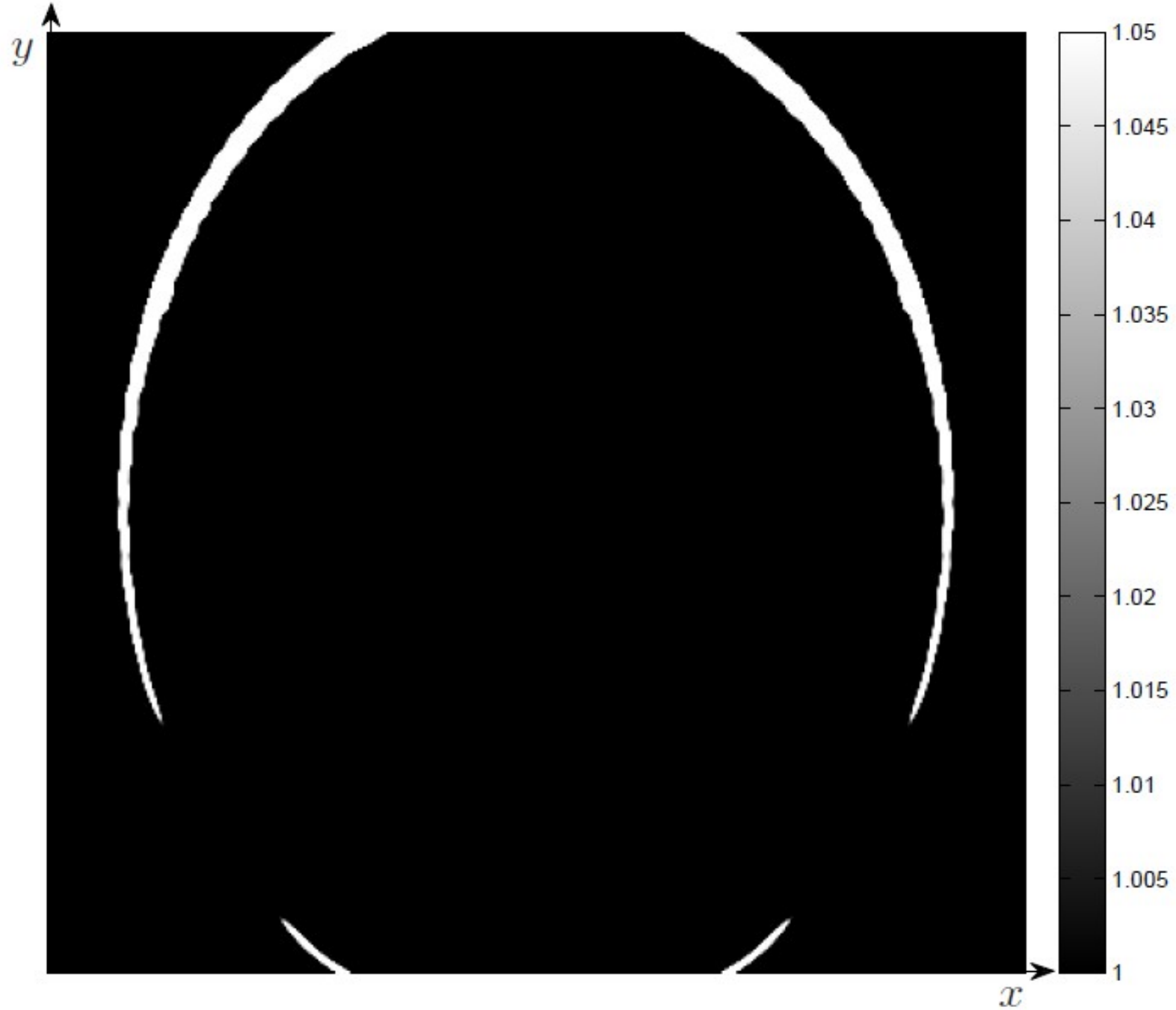
## 8. Quelques résultats



## 8. Quelques résultats

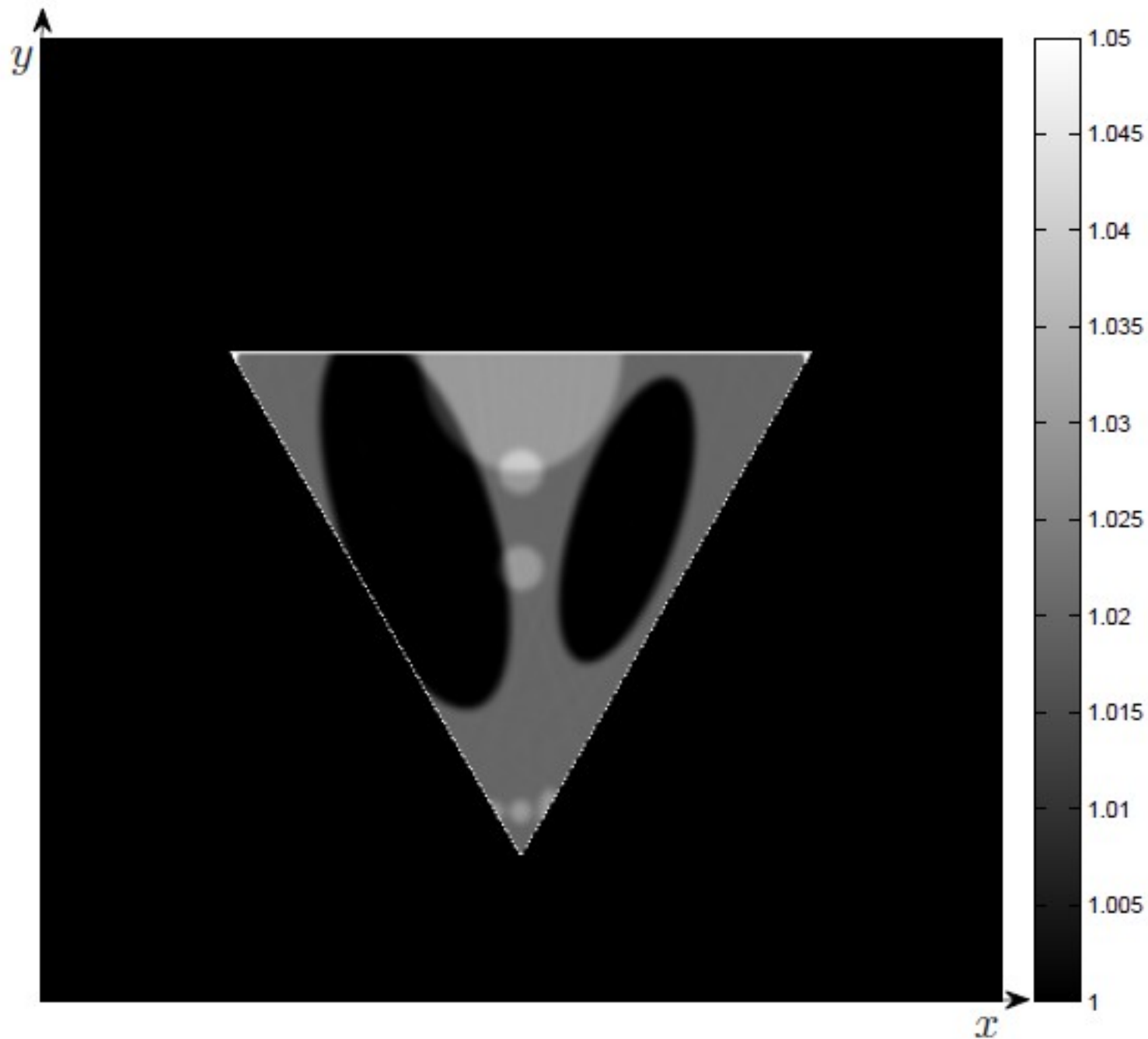


## 8. Quelques résultats

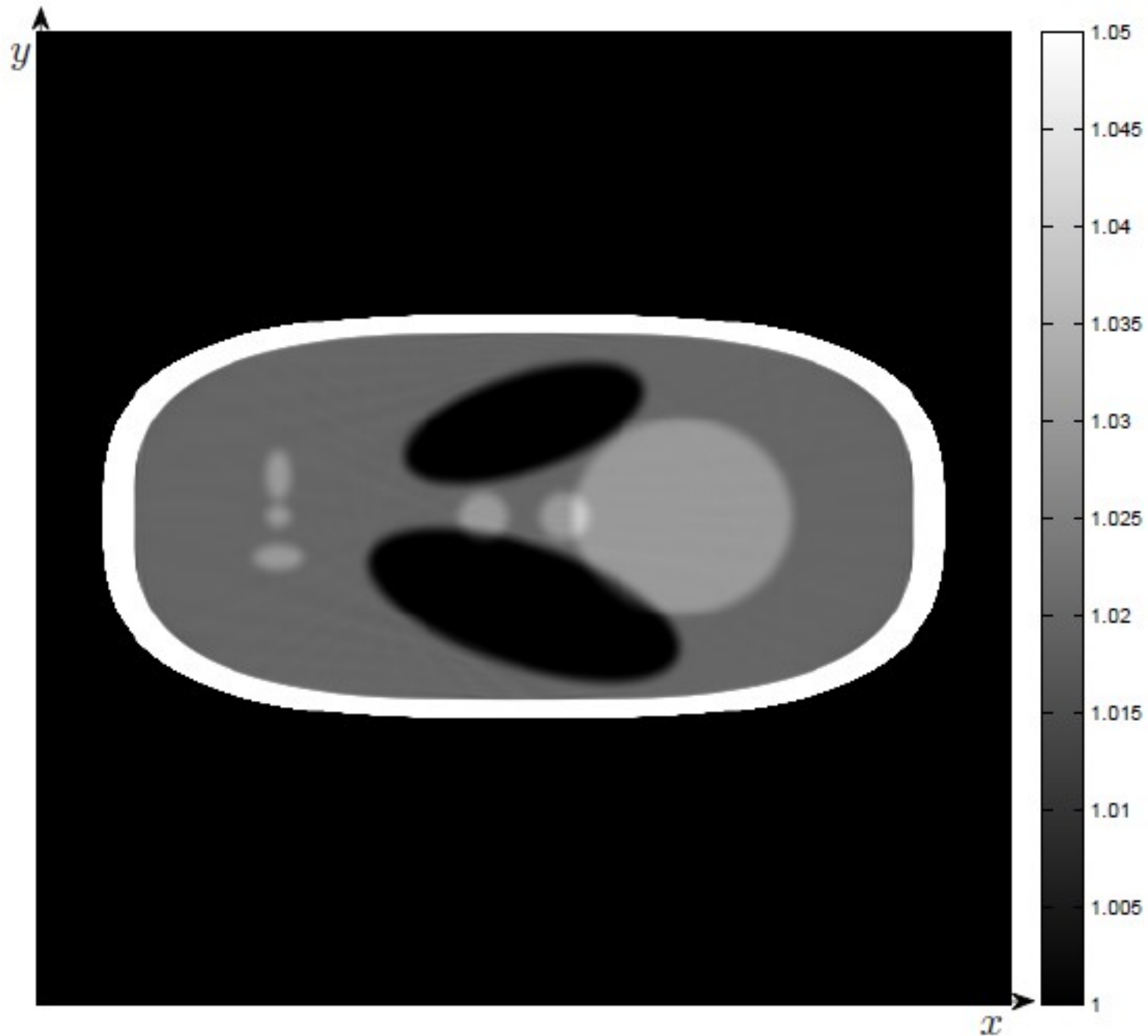




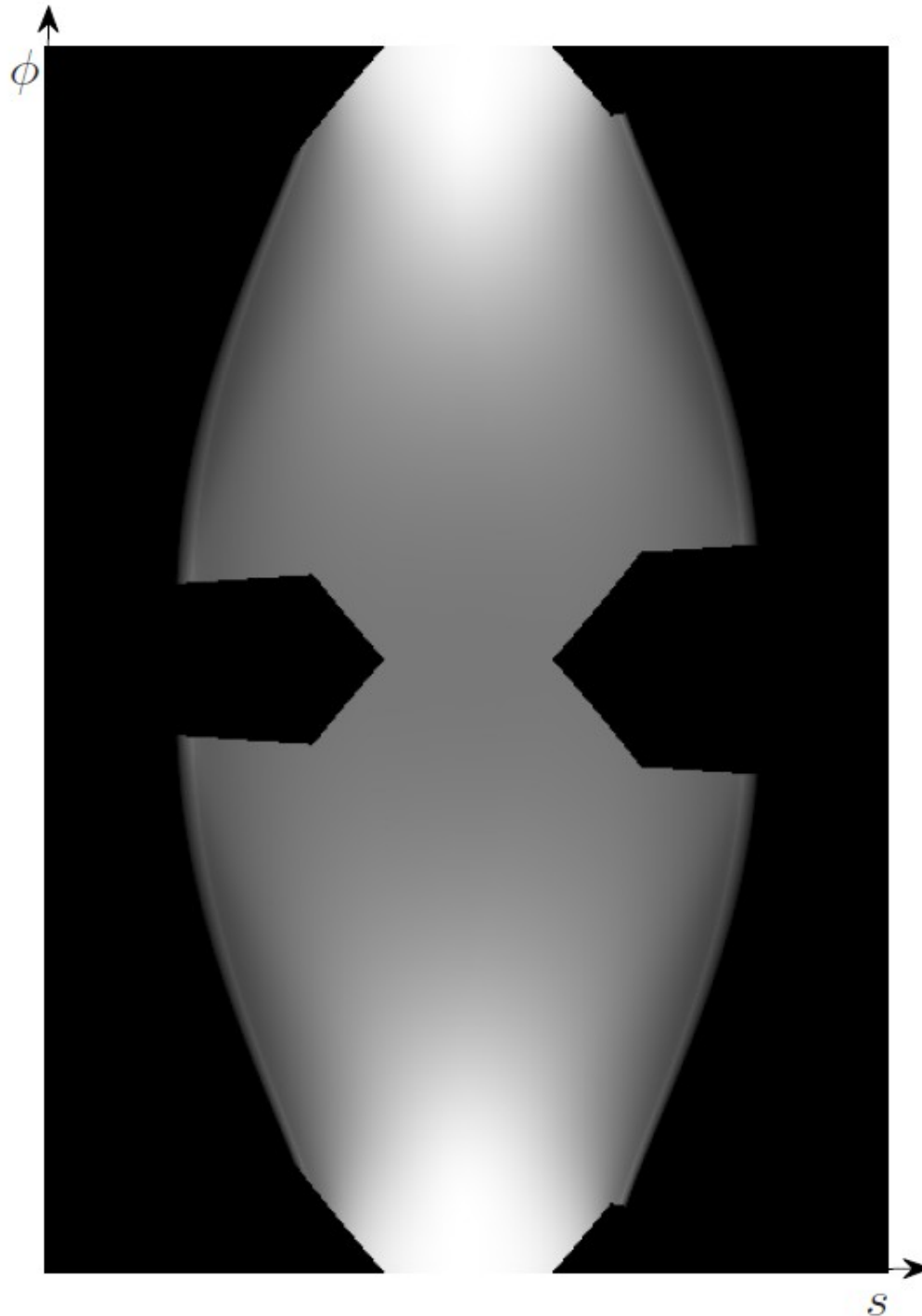
## 8. Quelques résultats



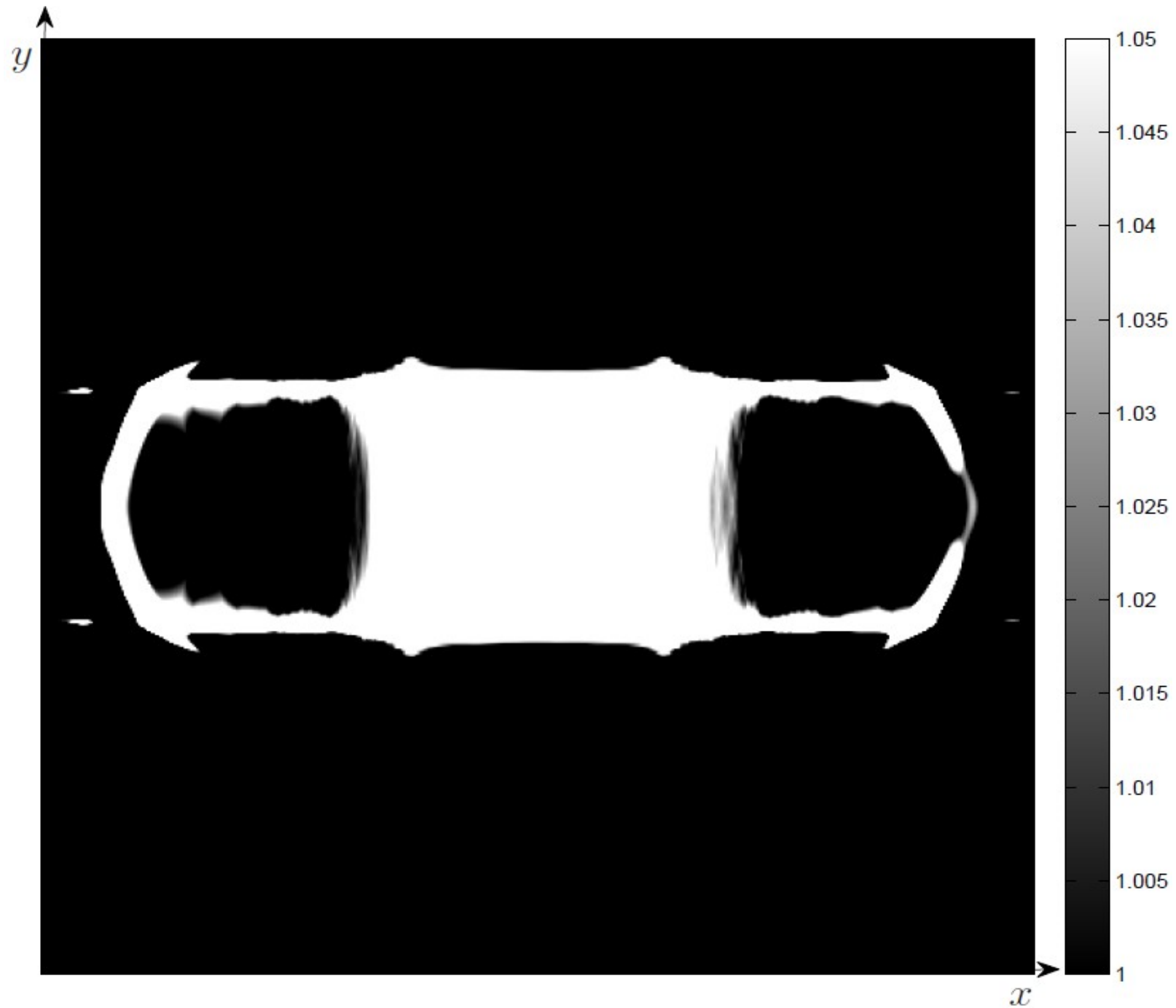
## 8. Quelques résultats



## 8. Quelques résultats



## 8. Quelques résultats



## 8. Quelques résultats

