

TD n°11 : Analyse multirésolution de Shannon

IUP MAI3 - Module M53

Rappels :

- On note \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier et la transformée de Fourier conjuguée sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
- $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f$ p.p.
- La formule de Parseval s'écrit

$$\forall (f, g) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2(\mathbb{R}), \int_{x \in \mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\omega \in \mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega)\overline{\mathcal{F}g(\omega)}d\omega$$

- La formule de Shannon s'écrit
Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, et si $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \text{sinc}(\pi(t-n)) \quad \left(\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}, \text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t} \right)$$

au sens de la convergence dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

On définit ici la suite de sous-espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ par

$$V_j = \{f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}); \text{supp}(\mathcal{F}f) \subset [-2^j \frac{1}{2}, 2^j \frac{1}{2}]\}$$

1. Soit $g = \mathcal{K}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$; calculer $\overline{\mathcal{F}}g$.
2. Soit $\theta : t \mapsto \text{sinc}(\pi t)$; déduire de la question précédente l'expression de $\mathcal{F}\theta$, et vérifier que $\theta \in V_0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction $\theta_n : t \mapsto \theta(t-n)$; montrer que la famille $(\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 .
4. Montrer que la suite d'espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
5. En reprenant les notations introduites en cours, calculer l'expression des filtres \hat{h} et \hat{g} associés à cette analyse mutirésolution.
6. Définir dans le domaine de Fourier une ondelette engendrant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.