

IUP MAI3 - M53

03/09/2004

durée : 1h00; 1 feuille A4 RV autorisée

1. Transformée de Fourier et Transformée en ondelettes continue

Soit un signal $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$; soit g le signal défini par

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(kt - t_0)$$

où t_0 est un réel et k un réel strictement positif.

(a) Exprimer la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f .

(b) Soit $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ une ondelette.

Exprimer la transformée en ondelettes de g par rapport à ψ en fonction de celle de f .

2. Transformée de Fourier

Soit $a > 0$, soit $f(x) = e^{-ax^2}$. Calculez $f'(x)$ et établissez une équation différentielle liant f et sa dérivée. En déduire, par transformée de Fourier de cette équation, la transformée de Fourier de f .

3. Convolution.

Supposons que nous observons une fonction $x_0(t)$ inconnue à travers une instrument de mesure dont la réponse impulsionnelle est une gaussienne $b(t) = e^{-at^2}$ avec $a > 0$. Nous mesurons donc la fonction $y(t)$ telle que

$$y(t) = b \star x_0(t)$$

où \star est l'opérateur de convolution.

(a) Comment la transformée de Fourier permet d'identifier x_0 connaissant y et b ?

(b) Supposons que les mesures $y(t)$ sont perturbées par un bruit additif $\epsilon(t)$ de telle sorte que

$$y(t) = b \star x_0(t) + \epsilon(t)$$

Quel sont les risques dans l'utilisation de l'estimateur défini dans la question précédente ?