IUP MAI3 - M53
08/01/2004
durée : $\leq$ 2h00; documents *manuscrits* autorisés

1 Filtrage

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, nous considérons le système Σ :

$$f \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow g$$

gouverné par l'équation différentielle :

$$g' - ag = f' - bf, \tag{1}$$

avec $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, tel que $b \neq a$. On impose la condition $f = 0 \Longrightarrow g = 0$.

1. En posant $g = w + f$ montrez que
$$w' - aw = (a-b)f, \tag{2}$$
2. En déduire que
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} (a-b)e^{a(t-s)} f(s)ds$$
(on pourra chercher w sous la forme $w(t) = e^{at}\theta(t)$).
3. En déduire que w est la convolution de f par h
$$w = h \star f, \tag{3}$$
avec h une fonction que vous déterminerez.
4. Calculez la transformée de Fourier de l'équation (2) et retrouvez ainsi l'équation (3) et le résultat de la question précédente.
5. Montrez que
$$||g||_\infty \leq K||f||_\infty$$
avec $K > 0$ que vous déterminerez.

2 Shannon

Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}(\mathbb{R})$ telle que le support de sa transformée de Fourier vérifie $\text{Supp}\left(\hat{f}\right) \subset [\xi_0 - b, \xi_0 + b]$ avec $b > 0$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g(t) = e^{-i\xi_0 t} f(t)$. Montrez que $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi + \xi_0)$

2. En déduire que

$$\forall h, 0 < h < \frac{\pi}{b}, f(t) = e^{i\xi_0 t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi_0 kh} f(kh) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-kh)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-kh)}$$

3. Pouvez vous justifier la condition de Shannon $h < \pi/b$ pour échantillonner f en considérant directement $\hat{f}$?

3 Série de Fourier

1. Soit f périodique de période $a > 0$, telle que $\forall t \in [0, a[, f(t) = t/a$; calculez la série de Fourier de f.

2. Soit u et v deux fonctions de $\mathbb{L}^2_P(a)$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = u(t - t_0)$, avec $t_0 \in \mathbb{R}$. Exprimez les coefficients de Fourier de la fonction v en fonction de ceux de u.

3. En déduire la série de Fourier de la fonction g périodique de période a, telle que $\forall t \in [0, a/2[, g(t) = 1/2 + t/a$ et $\forall t \in [a/2, a[, g(t) = t/a - 1/2$.

4 Ondelette de Littlewood Paley

Nous considérons l'analyse multirésolution engendrée par la fonction mère $\phi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi;\pi[}(\xi)$$

1. Montrez que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi + 2n\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

2. Montrez que

$$\phi(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

3. A partir de la relation à deux échelles

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi/2)\hat{h}(\xi/2) \text{ où } \hat{h}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi} \text{ est } 2\pi \text{ périodique,}$$

déterminez $\hat{h}$.

4. Montrez que

$$h_{-n} = \sqrt{2} c_n(\hat{h})$$

où $c_n\left(\hat{h}\right)$ est le n^{ieme} coefficient de Fourier de $\hat{h}$. En déduire, que

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}$$

5. Choisissons $\hat{g}(\xi) = -e^{-i\xi}\hat{h}(\xi+\pi)$. Montrez que $\hat{g}$ est la fonction 2π périodique telle que

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in [-\pi/2; \pi/2[\\ -e^{-i\xi} & \text{si } \xi \in [\pi/2; 3\pi/2[\end{cases}$$

6. Soit $f \in \mathbb{L}^2_P(2\pi)$, montrez que

$$c_n\left(e^{-i\xi} f(\xi)\right) = c_{n+1}(f)$$

(avec l'abus de notation suivant : $e^{-i\xi} f(\xi)$ désigne ici dans la fonction qui à ξ associe $e^{-i\xi} f(\xi)$ et donc $c_n\left(e^{-i\xi} f(\xi)\right)$ désigne son n^{ieme} coefficient de Fourier).

7. En remarquant que $\hat{h}(\xi+\pi) = 1 - \hat{h}(\xi)$ montrez que

$$c_n(\hat{g}) = \begin{cases} -1 + c_0(\hat{h}) & \text{si } n = -1 \\ c_{n+1}(\hat{h}) & \text{sinon} \end{cases}$$

8. En déduire que

$$g_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n-1)\frac{\pi}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

(On rappelle que (g_n) est défini par $\hat{g}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{-in\xi}$.)

9. Retrouvez $g_n = (-1)^n \overline{h}_{1-n}$.

10. A partir de $\hat{\psi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi/2)\hat{g}(\xi/2)$ déduire que

$$\hat{\psi}(\xi) = -\frac{e^{-i\xi/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\chi_{[-2\pi;-\pi[}(\xi) + \chi_{[\pi;2\pi[}(\xi)\right)$$

11. En déduire l'ondelette mère $\psi(t)$. Est-elle bien localisée en temps t ?