IUP MAI3 - M53
08/01/2004
durée : $\leq$ 2h00; documents *manuscrits* autorisés

1. **Transformée de Fourier de fonctions (environ 3 points)**
   Calculez la transformée de Fourier de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

   En déduire celle de
$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$
   et de
$$h(x) = \frac{1}{1+(x-a)^2}, \ (a \in \mathbb{R}).$$

2. **Filtre (environ 3 points)**
   Soient les fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous supposons que g est la sortie et f l'entrée d'un système S géré par l'équation différentielle :
$$\sum_{k=0}^{q} b_k g^{(k)} = \sum_{j=0}^{p} a_j f^{(j)} \text{ avec } a_p b_q \neq 0.$$
   Nous notons
$$P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k,$$
   et nous supposons que Q n'a pas de racine imaginaire pure.

   (a) Exprimez $\hat{g}(\xi)$ en fonction de $\hat{f}(\xi)$. En déduire que le système S est un filtre (on admettra la continuité) dont on donnera la fonction de transfert $H(\xi)$. En supposant que le degré de P est strictement inférieur au degré de Q, exprimez S sous la forme d'une convolution (on admettra que dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f \star h) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(h)$, avec $(\mathcal{F}(h))(\xi) = H(\xi)$).

   (b) Donnez h et $\mathcal{F}(h)$ pour le filtre RC gouverné par l'équation différentielle
$$RCg' + g = f.$$
   En considérant le module de la fonction de transfert, montrez que c'est un filtre passe bas.

3. **Echantillonnage. (environ 5 points)**
   Nous considérons une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ et telle que le support $\text{supp}\left(\hat{f}\right)$ de $\hat{f}$ vérifie :
$$\text{supp}\left(\hat{f}\right) \subset]-3b, -b] \cup]3b, 5b] \text{ avec } b > 0.$$

(a) Quelle est la condition géométrique de Shannon associée à l'échantillonnage de f aux points kh où $h > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$?

(b) Montrez géométriquement que $h_s = \frac{\pi}{4b}$ satisfait la condition de Shannon.

(c) Montrez géométriquement que $h_o = \frac{\pi}{2b}$ satisfait aussi la condition de Shannon.

(d) Quel est le schéma d'échantillonnage de f le plus efficace? Donnez la formule d'interpolation de Fourier de f mesurée aux points $k\frac{\pi}{2b}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4. **Construction d'une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ à partir d'une analyse multirésolution : l'exemple de l'approximation par des splines polynômiales de degré 1. (environ 9 points)**

La partie 3 de cet exercice peut être traitée en admettant les résultats de la partie 2.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note V_j le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et affines sur chacun des intervalles $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ (i.e. coïncidant sur chaque intervalle avec un polynôme de degré 1).

On note ϕ la fonction de l'espace V_0 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } x \in [-1, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Enfin, on note

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

le produit scalaire de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Partie 1

1.1. Tracer ϕ, $x \mapsto \phi(x-1)$, $x \mapsto \phi(x+1)$.

1.2. Tracer sur un autre graphique ϕ, $x \mapsto \phi(2x)$, $x \mapsto \frac{1}{2}\phi(2x-1)$,$x \mapsto \frac{1}{2}\phi(2x+1)$, et vérifier que l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x+1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x-1)$$

1.3. Montrer que la famille $\{x \mapsto \phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ n'est pas orthogonale.

Partie 2

On peut en fait montrer - et nous l'admettrons - que la famille $\{x \mapsto \phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz $^{(N_1)}$ de l'espace V_0; nous allons en déduire une base orthonormée de V_0 grâce au résultat suivant :

> *Soit $\theta \in L^2(\mathbb{R})$, et V un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ tels que $\{x \mapsto \theta(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V. Si Λ est la fonction définie dans le domaine de Fourier par*
>
> $$\hat{\Lambda}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi|^2\right)^{1/2}}$$
>
> *alors la famille $\{x \mapsto \Lambda(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de l'espace V.*

2.1 Calculer la transformée de Fourier de ϕ (pour cela, on pourra par exemple remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \phi^0 \star \phi^0(x)$, où ϕ^0 est l'indicatrice de $[-1/2, 1/2]$).

2.2 En déduire que si l'on définit la fonction φ dans le domaine de Fourier par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{1}{\omega^2 \sqrt{S_4(\omega)}} & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad S_4(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^4} \qquad (N_2)$$

alors la famille $\{x \mapsto \varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0.

On peut alors montrer - et nous l'admettrons - que les espaces V_j forment une analyse multirésolution orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, avec la fonction φ ainsi construite comme fonction d'échelle.

Partie 3

3.1 En reprenant les notations vues en cours, donner alors, en fonction de S_4, l'expression du filtre m_0 associé à φ, puis celle du filtre m_1 qu'on peut leur associer.

3.2 Construire alors une ondelette ψ engendrant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ (on la définira dans le domaine de Fourier).

Notes (à titre culturel...):

(N_1) *Une famille de vecteurs $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ d'un espace de Hilbert H est appelée base de Riesz de H si elle est linéairement indépendante et s'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que pour tout $f \in H$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n e_n$$

avec

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

(on relâche la condition d'orthogonalité par rapport à une base orthonormée.)

(N_2) *Cette somme S_4 se calcule, et on peut montrer qu'on a*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^*, \quad S_4(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^4} = \frac{1 + 2\cos^2(w/2)}{48 \sin^4(\omega/2)}$$