Laurent Desbat et Olivier Le Cadet : Laboratoires TIMC et LMC de IMAG.

IUP MAI 3, M53
Examen de Traitement du Signal
21/12/2001
durée : <3h. ; documents *manuscrits* autorisés

1. Ondelettes de Shannon
   Les 3 premières questions peuvent être faites indépendemment, en admettant les résultats des questions précédentes.

   L'analyse multirésolution de Shannon est définie à l'aide de fonctions dont les transformées de Fourier sont à supports inclus dans un compact. Ainsi, on va définir une suite de sous-espaces V_j de $L^2(\mathbb{R})$ par :

   $$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / Supp\hat{f} \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]\}$$

   pour $j \in \mathbb{Z}$.

   (a) *Calculez la transformée de Fourier inverse de* $\chi_{[-\pi,\pi]}$.

   (b) Soit θ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\theta(t) = sinc(\pi t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$; *vérifiez que θ appartient à V_0, puis montrez que $\{\theta(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une base orthonormée de V_0.*

   (c) *Montrez que la suite d'espaces $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ définit une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.*

   (d) Dans le cadre du cours sur les analyses multirésolution, on a défini des filtres $m_0(\omega)$, $m_1(\omega)$, et on a vu comment définir une ondelette ψ sur une analyse multirésolution. *En reprenant ces notations, évaluez $m_0(\omega)$, $m_1(\omega)$ sur une période, $[-\pi,\pi]$ par exemple, puis $\hat{\psi}(\omega)$, pour $\omega \in \mathbb{R}$.*

   (e) *Combien l'ondelette ψ a-t-elle de moments nuls ? Quels sont, d'après vous, les qualités et les défauts de cette ondelette ψ ?*

   (f) (question subsidiaire) *S'il vous reste du temps, calculez explicitement l'ondelette ψ.*
   Rappels :
   - formule de Shannon.
     Si le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, alors $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT)\frac{sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}}$.
   - Parseval.
     La transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (et donc conserve le produit scalaire).

2. Filtre
   Soit un système $\mathcal{O}$ qui à un signal (en pratique une fonction) $f \in X$ fait correspondre le signal $\mathcal{O}(f) \in Y$ où X et Y sont des espaces vectoriels. On dit que le système est un filtre si c'est un système linéaire, invariant et continu. Soit $a \in \mathbb{R}$, l'opérateur retard τ_a est défini par
   $$(\tau_a(f))(t) = f(t-a), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
   On rappelle qu'un système $\mathcal{O}$ est invariant (on dit aussi *stationnaire*) si
   $$\forall f \in X, \forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{O}(\tau_a(f)) = (\tau_a \mathcal{O}(f)).$$
   (a) Soit $\mathcal{V}_o$ le système défini par
   $$(\mathcal{V}_o f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)o(t)dt \qquad (1)$$
   où $o \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrez que $\mathcal{V}_o$ est un filtre de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ (on rappelle qu'un opérateur linéaire est continu s'il est borné).
   (b) Soit $\mathcal{O}$ le système défini par
   $$(\mathcal{O}(f))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{o}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (2)$$
   où o, f, $\hat{f}$ et $\hat{o}$ sont des fonctions de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Montrez que $\mathcal{O}$ est un filtre
   (c) Montrez que si $\hat{o}(\xi)$ est un pôlynome de degré $n \in \mathbb{N}^*$ en ξ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $\forall k = 0, \dots, n, f^{(k)} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ alors le filtre $\mathcal{O}$ décrit par (2) est bien défini (même si o n'est pas définie en tant que fonction dans ce cas). Que est l'effet de ce filtre sur f?
   (d) Exprimez des liens et des différences entre les filtres du type (2) et ceux du type (1) ?

3. Déconvolution

   (a) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, soit
   $$b(x_1, x_2) = e^{-\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)}$$
   Montrez que
   $$\hat{b}(\xi_1, \xi_2) = \frac{a_1 a_2}{2} e^{-\left(\frac{\xi_1^2 a_1^2 + \xi_2^2 a_2^2}{4}\right)}$$
   Indication : on se rappellera que
   $$\text{si } e(t) = e^{-\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)} \text{ alors } \hat{e}(\nu) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\nu^2 \sigma^2}{4}\right)} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\hat{b} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, soit $\mathcal{V}_b$ le filtre qui à f associe $\mathcal{V}_b(f)$ tel que :

$$\left(\mathcal{V}_b f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)b(t)dt, x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^2.$$

Supposons que $\left(\mathcal{V}_b f\right)(x)$ et $b(x)$ soient connues sur $\mathbb{R}^2$ et que f soit inconnue. En quoi $\tilde{f}$ définie par

$$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\widehat{\mathcal{V}_b f}(\xi)}{\hat{b}(\xi)}$$

peut elle être considérée comme un estimateur de f ?

(c) Pourquoi $\tilde{f}$ est un mauvais estimateur de f ? Quel estimateur proposeriez vous ?