Laurent Desbat, Laboratoire TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525

IUP MAI 3, M53 et M1 du Master MI, MAP402i
Exercice de Traitement du Signal
Novembre 2004
durée : <1h; Une feuille A4 autorisée

1. Transformée de Fourier de fonctions
Calculez la transformée de Fourier des fonctions $f(x) = \mathrm{sign}(x)e^{-\lambda|x|}$, $g(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-\lambda x}h(x)$, avec λ complexe de partie réelle strictement positive et k entier naturel et $h(x) = \chi_{\mathbb{R}^+}(x)$.

2. Transformée de Fourier
Nous considérons la fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et deux scalaires $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculez la transformée de Fourier de la fonction $f_{a,b}$ définie par :
$$f_{a,b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(at+b), \forall t \in \mathbb{R}$$
en fonction de celle de f.

3. Convolution
Soient f et g deux fonctions continues à support compact telles que
$$\forall t \notin]-b;b[, f(t) = 0\,; \;\; \forall t \notin]0;a[, g(t) = 0,$$
avec $0 < b < a/2$. On considère la discrétisation de la convolution $c = f \star g$ de f par g suivante :
$$c(t_k) = h \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(t_k - t_j)g(t_j)$$
où $\forall k \in \mathbb{Z}, t_k = kh$ et $h > 0$ est un pas de discrétisation. Nous notons $f_k \stackrel{\text{def}}{=} f(t_k)$, $g_k \stackrel{\text{def}}{=} g(t_k)$, $c_k \stackrel{\text{def}}{=} c(t_k)$.

(a) Montrez que
$$c_k = h \sum_{j=k-J}^{k+J} f_{k-j} g_j$$
où J est un entier naturel que l'on déterminera.

Nous considérons que $h = a/N$ où $N > 2 * J$ est un entier naturel pair et nous définissons les suites périodiques $({}^P f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $({}^P g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, de période N, telles que
$${}^P f_k = f_k, k = -N/2, \ldots, N/2-1 \;\text{ et }\; {}^P g_k = g_k, k = 0, \ldots, N-1.$$

Soit $({}^P c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la convolution circulaire de $({}^P f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ par $({}^P g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, c'est à dire,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, {}^P c_k = ({}^P f \star {}^P g)_k = \sum_{q=0}^{N-1} {}^P f_{k-q} {}^P g_q \tag{1}$$

(b) Montrez que ${}^P f_l = f_l, \forall l = -N+J+1, \ldots, N-1-J$.

(c) Montrez que ${}^P c_k = c_k, \forall k = J, \ldots, N-1-J$.

(c) Pourquoi le résultat précédent n'est il pas garanti pour $k = 0, \ldots, J-1$ et $k = N-J, \ldots, N-1$?

(e) Quel est l'intérêt d'utiliser la convolution circulaire?

(f) Proposez une méthode pour que la convolution circulaire permette de calculer tous les $= c_k, \forall k = 0, \ldots, N-1$.