Laurent Desbat, Laboratoire TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525

IUP MAI 3, M53
Exercice de Traitement du Signal
05/12/2002
durée : <1h00; documents *manuscrits* autorisés

1. Nous considérons la fonction
$$f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists l \in \mathbb{Z}, t + 2l\pi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   (a) Représentez f_1 sur l'intervalle $[-5\pi/2; 5\pi/2]$.
   (b) Montrez que f_1 est paire, périodique de période 2π et de carré intégrable sur une période.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f_1) = c_{-n}(f_1)$ (où $c_n(f_1)$ est le n^{iem} coefficient de Fourier de f_1) et que f_1 peut se développer en série de Fourier sous la forme
$$f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \tag{1}$$
   (d) Calculez les valeurs de $a_n, n = 0, \ldots, +\infty$ dans (1).

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction
$$f_p(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists l \in \mathbb{Z}, t + 2pl\pi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   (a) Représentez f_p sur l'intervalle $[-5p\pi/2; 5p\pi/2]$.
   (b) Montrez que f_p est paire, périodique de période $2p\pi$ et de carré intégrable sur une période.
   (c) En déduire que f_p peut se développer en série de Fourier sous la forme
$$f_p(t) = {}^p a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} {}^p a_n \cos(nt/p) \tag{2}$$
   (d) Calculez les valeurs de ${}^p a_n, n = 0, \ldots, +\infty$ dans (2).

3. Soit la fonction
$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrez que $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.
   (b) Calculez la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
   (c) Quel est le lien entre $\hat{f}$ et a_n ? Quel est le lien entre $\hat{f}$ et ${}^p a_n$?