Laurent Desbat, Laboratoire TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525

IUP MAI 3, M53
Exercice de Traitement du Signal
29/11/2001
durée : <1h30; documents *manuscrits* autorisés

1. Série de Fourier
   Nous considérons la fonction $f(t) = \cos^3(t)$
   (a) Montrez que f est une fonction paire, périodique de période 2π.
   (b) En déduire que f peut se développer en série de Fourier sous la forme
   $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \quad (1)$$
   (c) En admettant (ou en montrant si vous avez le temps) que
   $$\cos^3(t) = \frac{1}{4}\left(\cos(3t) + 3\cos(t)\right)$$
   calculez les valeurs de $a_n, n = 0, \ldots, +\infty$ dans (1). [On se souviendra que $\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$].
   (d) Conclusion ?
2. Transformée de Fourier discrète
   Nous supposons que $N = 2^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ la transformée de Fourier discrète de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par
   $$X_p = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-kp}$$
   avec $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Une suite numérique $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dite périodique de période $N \in \mathbb{N}$ si
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, x_{k+N} = x_k.$$
   (a) Montrez que X_p est une suite périodique de période N.
   (b) La convolution circulaire z_k des suites périodiques, de période N, x_k et y_k est définie par
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, z_k = (x * y)_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \quad (2)$$
   Montrez que $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est périodique de période N et montrez que la convolution est symétrique, c'est à dire que $(x * y)_k = (y * x)_k$.

(c) Les suites $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ désigneront respectivement la transformée de Fourier de $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
Montrez que $Z_p = NX_pY_p, \forall p \in \mathbb{Z}$. En déduire le coût de l'évaluation de la convolution circulaire de taille N.

(d) Montrez que si $\forall k \in \mathbb{Z}, w_k = x_k y_k$, alors

$$W_p = \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{p-q}.$$

3. Transformée de Fourier et filtrage
Dans le cadre du TP sur la tomographie, nous avons vu qu'il est possible de reconstruire une fonction f à partir de sa transformée de Radon $\mathcal{R}f$ selon la formule :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}(\phi, \sigma) e^{i\sigma x\cdot\theta} |\sigma| d\sigma d\phi. \tag{3}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$,$\phi \in [0, \pi[$,$\sigma \in \mathbb{R}$, $\theta = (\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^2$.

(a) En quoi dans la formule (3), l'intégrale

$$g_\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}_\phi(\sigma) e^{i\sigma s} |\sigma| d\sigma \tag{4}$$

s'apparente-t-elle à un filtrage selon la variable s? Quel problème pratique pose la multiplication par $|\sigma|$?

(b) En pratique, on remplace (4) par

$$\tilde{g}_\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}f}_\phi(\sigma) e^{i\sigma s} |\sigma| \psi_b(\sigma) d\sigma \tag{5}$$

avec $b > 0$ est un paramètre de coupure

$$\psi_b(\sigma) = \chi_{[-b,b]}(\sigma) \mathrm{sinc}\left(\frac{|\sigma|\pi}{2b}\right)$$

où

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x=0} \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \chi_{[-b,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -b \le x \le b \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Montrez que si $\mathcal{R}f_\phi$ est suffisamment régulière alors on peut écrire

$$\tilde{g}_\phi(s) = \mathcal{R}f_\phi \star w_b(s)$$

où $w_b(s)$ est une fonction que l'on déterminera (remarquez que ψ_b est paire).